

**Projektive Laguerreebenen
und vierdimensionale lokalkompakte
zusammenhängende topologische
Laguerreebenen,
in denen der Büschelsatz gilt**

von

Volker Altrichter

aus

Mühlhausen

Diss. Erlangen

1980 #213



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546211_0038

**Projektive Laguerreebenen
und vierdimensionale lokalkompakte
zusammenhängende topologische
Laguerreebenen,
in denen der Büschelsatz gilt**

Den Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt

von

Volker Altrichter

aus

Mühlhausen

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaft-
lichen Fakultäten der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 5. Februar 1980

Vorsitzender der Promotionskommission: Professor Dr. H. Wegener

Erstberichterstatter: Professor Dr. K. Strambach

Zweitberichterstatter: Professor Dr. P. Plaumann

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Kapitel I : Definitionen und Voraussetzungen	
§ 1 Projektive Laguerreebenen	4
§ 2 Der Büschelsatz und die Büschelinvolutionen	6
Kapitel II : Die Konjugien	
§ 1 Definition der Konjugien	11
§ 2 Kreise und Konjugien	30
§ 3 Die Inzidenzgeometrie Π der Konjugien	32
Kapitel III : Nachweis der Axiome des Projektiven Raums für die Inzidenzgeometrie der Konjugien	
§ 1 Eindeutige Verbindbarkeit von 'Punkten' und das Reichhaltigkeitsaxiom	35
§ 2 Das Ebenenaxiom	38
Kapitel IV : Ergebnisse und Anwendungen	
§ 1 Der Hauptsatz	92
§ 2 Vierdimensionale lokalkompakte zusammenhängende topologische Laguerreebenen	93
§ 3 Zur Existenz projektiver Möbius- und Laguerre- ebenen	95
Literaturverzeichnis	97

Einleitung:

Die Laguerreebene verallgemeinert in natürlicher Weise das klassische Modell der Geometrie der ebenen Schnitte eines Zylinders ähnlich, wie der Begriff einer Möbiusebene das klassische Modell der ebenen Schnitte der Einheits-sphäre axiomatisiert. Das geometrische Äquivalent der algebraischen Darstellbarkeit einer Möbius- oder Laguerreebene ist der Satz von Miquel. Er gilt in einer solchen Geometrie genau dann, wenn sie als Geometrie der ebenen Schnitte einer Quadrik ohne isotropen Punkte oder eines quadratischen algebraischen Kegels aufgefaßt werden kann.

Der andere wichtige bisher in der Möbius- und Laguerreebene betrachtete Schließungssatz ist der Büschelsatz. Mit welcher algebraischen Eigenschaft er äquivalent ist, ist bis heute nicht ganz geklärt. Man vermutet, daß seine Gültigkeit mit der Tatsache äquivalent ist, daß sich eine Möbius- bzw. Laguerreebene so in den projektiven Raum einbetten läßt, daß die Kreise ebene Schnitte eines Ovoids (im Fall der Möbiusebene) bzw. ebene Schnitte eines um seine Spitze verminderten, über einem ebenen Oval errichteten Kegels (im Fall der Laguerreebene) sind.

Das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit besagt, daß für die Klasse der projektiven Laguerreebenen, das sind solche, in denen sich je zwei Kreise schneiden und jeder Kreis mindestens zwei Kreise jedes Kreis- und Berührbüschels echt schneidet, die eben erwähnte Vermutung richtig ist. Unser Beweis greift auch für die projektiven Möbiusebenen.

Doch aus deren Einbettbarkeit in den projektiven Raum ergibt sich, daß keine Möbiusebenen existieren, in denen zugleich der Büschelsatz gilt und die projektiv sind. Anders ist die Situation bei Laguerreebenen. Die prominentesten Beispiele sind ebene Schnitte eines um seine Spitze verminderten algebraischen Kegels in einem projektiven Raum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper oder eines Kegels, den man über einem Oval errichtet, welches mittels transfiniter Induktion so konstruiert ist, daß keine Passanten auftreten.

Da allgemein in jeder mindestens vierdimensionalen lokal-euklidischen topologischen Laguerreebene je zwei Kreise einander schneiden, konnten wir unser Hauptergebnis dazu benutzen, um die Einzigkeit der klassischen komplexen Laguerreebene in dieser Klasse zu zeigen: Jede lokal-kompakte zusammenhängende topologische Laguerreebene, in welcher der Büschelsatz gilt, ist ovoidal.

Der Leitgedanke für den Beweis unseres Hauptergebnisses ist klar: Es muß der projektive Raum explizit konstruiert werden aus den Punkten und Kreisen der Geometrie. Wie dies etwa zu geschehen hat, führte HESSELBACH für den Fall von zweidimensionalen topologischen Möbiusebenen im Jahre 1933 (Abh. Mat. Sem. Univ. Hambg.) durch. Bei seinem Beweis spielen wie auch bei uns die sogenannten Konjugien eine wesentliche Rolle. Diese sind charakterisiert durch Angabe zweier Punktpaare auf einem Kreis, welche man als konzyklische Zentren zweier Büschelinvolutionen, das sind Involutionen, die von einem Büschel von Kreisen

auf einem nicht dazugehörenden Kreis induziert werden, betrachten kann. Da für Laguerreebenen fünf verschiedene Typen von Konjugien auftreten und sich daraus eine große Anzahl verschiedenartiger Typen von Geraden und Ebenen des Raumes ergibt, ist eine umfangreiche Fallunterscheidung beim Nachweis der Axiome des projektiven Raumes erforderlich.

Herrn Professor Dr. K. Strambach, der diese Arbeit angeregt und deren Fortgang stets aufmerksam verfolgt hat, danke ich herzlich für seine wertvollen Hinweise und Ratschläge.

Kapitel I : Definitionen und Voraussetzungen

Zuerst führen wir den Begriff der projektiven Laguerreebene ein. Danach formulieren wir den Büschelsatz für Laguerreebenen und notieren erste Folgerungen.

§ 1 Projektive Laguerreebenen

1.1 Definition: Eine Laguerreebene Λ ist ein Tripel

$(\mathbb{P}, \mathbb{K}, I)$, bestehend aus der Punktmenge $\mathbb{P}$, auf der eine Äquivalenzrelation definiert ist, die man Parallelität nennt, der Kreismenge $\mathbb{K}$ und der Inzidenzrelation I , einer Teilmenge von $\mathbb{P} \times \mathbb{K}$, mit folgenden Eigenschaften:

1. Axiom des Verbindens: Durch je drei paarweise nichtparallele Punkte p_1, p_2, p_3 geht genau ein Kreis, den man mit $K(p_1, p_2, p_3)$ bezeichnet.

2. Axiom des Berührens: Zu jedem Punkt p , jedem Kreis K , der p nicht enthält, und jedem Punkt q auf K , der nichtparallel zu p ist, existiert genau ein Kreis, der p enthält und den Kreis K in q berührt. Er wird mit $B(p, K, q)$ bezeichnet.

3. Axiom des Parallelprojizierens: Zu jedem Punkt p gibt es auf jedem Kreis K genau einen zu p parallelen Punkt.

4. Axiom der Reichhaltigkeit: Es gibt einen Kreis K , der drei Punkte enthält, und einen Punkt, der nicht mit K inzidiert.

1.2 Bemerkung: Zwei Kreise 'schneiden' sich, wenn sie einen oder zwei Punkte gemeinsam haben.

1.3 Definition: Ein Kreisbüschel ist die Menge aller Kreise, die zwei fest vorgegebene Punkte enthalten. Ein Berührbüschel ist die Menge aller Kreise, die einen vorgegebenen Kreis in einem Punkt p des Kreises berühren.

1.4 Definition: Wir nennen eine Laguerreebene Λ eine projektive Laguerreebene, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

- i) Je zwei Kreise von Λ schneiden sich.
- ii) In jedem Kreisbüschel und jedem Berührbüschel existieren mindestens zwei Kreise, die einen vorgegebenen Kreis, der nicht zum Büschel gehört, in jeweils zwei Punkten schneiden.

§ 2 Der Büschelsatz

2.1 Bemerkung: Seien a, b, c, d Punkte einer Laguerreebene.

Existiert ein Kreis, der die vier Punkte enthält, so wird er mit $K(a, b, c, d)$ bezeichnet. Dieser ist nach Axiom 1 dann eindeutig bestimmt.

2.2 Definition: In einer Laguerreebene Λ gilt der Büschelsatz, wenn für je acht paarweise nichtparallele Punkte $a, b, c, d, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ von Λ aus der Existenz der

Kreise $K(a, \bar{a}, b, \bar{b}),$
 $K(c, \bar{c}, d, \bar{d}),$
 $K(a, \bar{a}, c, \bar{c}),$
 $K(b, \bar{b}, d, \bar{d}),$
 $K(b, \bar{b}, c, \bar{c}),$

von denen mindestens vier verschieden sind, die Existenz des Kreises $K(a, \bar{a}, d, \bar{d})$ folgt.

2.3 Definition: Ist K ein Kreis, und sind a und $\bar{a}$ zwei

nichtparallele Punkte, die nicht auf K liegen, so kann

man eine Abbildung $\alpha_{a, \bar{a}}$ von K nach K definieren:

Für alle Punkte p aus K ist $\{p, \alpha_{a, \bar{a}}(p)\} = K(a, \bar{a}, p) \cap K$, falls p nichtparallel zu a und $\bar{a}$ ist. Ist p parallel zu

a , so ist $\alpha_{a, \bar{a}}(p) = [\bar{a}] \cap K$, wobei mit $[\bar{a}]$ die Klasse der zu $\bar{a}$ parallelen Punkte bezeichnet wird. $\alpha_{a, \bar{a}}$ heißt dann die Büschelinvolution mit den Zentren a und $\bar{a}$.

Sei p ein Punkt auf einem Kreis L , der nicht auf K liegt.

Dann definiert man die Berührbüschelinvolution $\alpha_{b, L}$ auf K :

Ist p ein Punkt von K , der nichtparallel zu b ist und nicht auf L liegt, so gilt $\{p, \beta_{b,L}(p)\} = B(p, L, b) \cap K$; für den Punkt b' auf K , der parallel zu b ist, gilt $\beta_{b,L}(b') = b'$, für einen Punkt q , der auf K liegt, gilt $\{q, \beta_{b,L}(q)\} = K \cap L$.

Im folgenden wird eine Laguerreebene Λ betrachtet, in welcher der Büschelsatz gilt und die eine zusätzliche Bedingung erfüllt: Sind $a, \bar{a}, b, \bar{b}$ vier Punkte auf einem Kreis L , und stimmen die Involutionen $\alpha_{a, \bar{a}}$ und $\alpha_{b, \bar{b}}$ oder $\beta_{b, L}$ auf einem Kreis K in allen Punkten überein, die $\alpha_{a, \bar{a}}$ bewegt und die nichtparallel zu $a, \bar{a}, b, \bar{b}$ sind, so wirken sie auf ganz K identisch.

2.4 Bemerkung: In einer solchen Laguerreebene gilt nach [6] der Büschelsatz genau dann, wenn zwei Büschelinvolutionen $\alpha_{a, \bar{a}}$ und $\alpha_{b, \bar{b}}$ mit den konzyklischen Zentren $a, \bar{a}, b, \bar{b}$ schon dann identisch wirken auf einem Kreis K , wenn sie einen Punkt dieses Kreises, der nichtparallel ist zu $a, \bar{a}, b$ und $\bar{b}$ und nicht festbleibt, gleich abbilden.

2.5 Proposition: Seien $a, \bar{a}, b, \bar{b}, d, \bar{d}, c$ paarweise nichtparallele Punkte von Λ . Existieren dann die Kreise $K(a, \bar{a}, b, \bar{b})$, $K(a, \bar{a}, d, \bar{d})$, $K(b, \bar{b}, d, \bar{d})$ und berühren sich die Kreise $K(a, \bar{a}, c)$ und $K(b, \bar{b}, c)$ im Punkt c , so berührt auch der Kreis $K(d, \bar{d}, c)$ diese Kreise im Punkt c .

Beweis: Schneidet nämlich der Kreis $K(d, \bar{d}, c)$ den Kreis $K(a, \bar{a}, c)$ noch in einem weiteren Punkt c^* und ist c^* nicht-

parallel zu b und $\bar{b}$, so existiert nach dem Büschelsatz der Kreis $K(b, \bar{b}, c, c^*)$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Ist dagegen c^* parallel zu $\bar{b}$, so betrachtet man die Büschelinvolutionen $\alpha_{a, \bar{a}}$ und $\alpha_{b, \bar{b}}$ mit konzyklischen Zentren in ihrer Wirkung auf dem Kreis $K(d, \bar{d}, c, c^*)$. Die Involutionen bilden d gleich ab und somit auch den Punkt c . Also ist im Widerspruch zur Voraussetzung c parallel zu b .

- 2.6 Proposition: i) Seien $a, b, \bar{b}, c, \bar{c}, d, \bar{d}$ paarweise nicht-parallelle Punkte von Λ . Berühren sich die Kreise $K(a, b, \bar{b})$, $K(a, c, \bar{c})$ und $K(a, d, \bar{d})$ im Punkt a und existieren die Kreise $K(b, \bar{b}, d, \bar{d})$ und $K(c, \bar{c}, d, \bar{d})$, so existiert auch der Kreis $K(b, \bar{b}, c, \bar{c})$.
- ii) Ist unter sonst gleichen Voraussetzungen b und c parallel, so folgt die Parallelität von $\bar{b}$ und $\bar{c}$.

Beweis: i) Angenommen der Kreis $K(b, \bar{b}, c)$ schneidet den Kreis $K(c, \bar{c}, d, \bar{d})$ in den Punkten c und c' , der verschieden von $\bar{c}$ ist. Dann bilden die Büschelinvolutionen $\alpha_{d, \bar{d}}$ und $\alpha_{c, c'}$ mit den konzyklischen Zentren $d, \bar{d}, c, c'$ den Punkt b des Kreises $K(a, b, \bar{b}) =: L$ gleich ab . Folglich wird auch der Punkt a dieses Kreises gleich, das heißt auf sich selbst abgebildet. Somit berührt der Kreis $K(c, c', a)$ den Kreis L und ist daher, wegen der Eindeutigkeit des Berührungskreises, mit dem Kreis $K(a, c, \bar{c})$ identisch. Also ist nach Konstruktion $\bar{c}$ gleich c' .

Berühren sich dagegen die Kreise $K(b, \bar{b}, c)$ und $K(c, \bar{c}, d, \bar{d})$ $=: K$, so wählt man auf K einen Punkt c' , so daß der

Kreis $K(b, \bar{b}, c')$ den Kreis K in zwei Punkten c', c'' schneidet. Ein solcher Punkt existiert nach 1.4 Definition. Nun betrachtet man die Schnittpunkte $c', \bar{c}'$ des Kreises $B(c', L, a)$ mit K . Dann existiert wie oben der Kreis $K(b, \bar{b}, c', \bar{c}')$, das heißt $\bar{c}'$ ist gleich c'' . Also wirken die Involutionen $\alpha_{b, \bar{b}}$ und $\beta_{a, L}$ gleich auf den Punkten von K , die von $\alpha_{b, \bar{b}}$ bewegt werden und damit auf ganz K . Somit existiert der Kreis $K(b, \bar{b}, c, \bar{c})$.

ii) Angenommen $\bar{b}$ ist nicht parallel zu $\bar{c}$. Dann existiert der Kreis $K(b, \bar{b}, \bar{c})$ und nach a) sogar der Kreis $K(b, \bar{b}, c, \bar{c})$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

2.7 Korollar: Zwei Büschelinvolutionen, deren Zentren konzyklisch sind, stimmen schon dann in ihrer Wirkung auf einem Kreis überein, wenn sie einen Punkt des Kreises gleich abbilden.

2.8 Korollar: Sei $\beta_{b, L}$ eine Berührbüschelinvolution und seien $a, \bar{a}$ zwei Punkte auf dem Kreis L . Dann wirkt die Büschelinvolution $\alpha_{a, \bar{a}}$ schon dann gleich auf einem Kreis K wie $\beta_{b, L}$, wenn beide Involutionen einen Punkt von K gleich abbilden, der nicht festbleibt.

2.9 Proposition: Zwei Berührbüschelinvolutionen $\beta_{a, L}$ und $\beta_{b, L}$ wirken schon dann auf dem Kreis K , der verschieden von L ist, gleich, wenn sie einen Punkt von K gleich abbilden, der nicht festbleibt.

Beweis: Sei x der Punkt von K , der gleich auf $\bar{x}$ abgebildet wird, das heißt, die Kreise $K(a, x, \bar{x})$ und $K(b, x, \bar{x})$ berühren den Kreis L . Weiter seien $c, \bar{c}$ Punkte von K mit $\beta_{b, L}(c) = \bar{c}$, das heißt, der Kreis $K(b, c, \bar{c}) =: L'$ berührt L . Dann bilden die Involutionen $\beta_{b, L'}$ und $\alpha_{c, \bar{c}}$ den Punkt x von $K(a, x, \bar{x})$ gleich ab, wirken also auf diesem Kreis gleich nach 2.8 Korollar. Somit bilden sie auch den Punkt a gleich ab, das heißt, der Kreis $K(a, c, \bar{c})$ berührt den Kreis L .

Kapitel II.: Die Konjugien

In diesem Abschnitt definieren wir die Konjugien und untersuchen deren Beziehung zu den Punkten und Kreisen der Laguerreebene.

§ 1 Definition der Konjugien

1.1 Hilfssatz: Sind $a, \bar{a}, b, \bar{b}$ vier Punkte auf einem Kreis K , so existiert ein Punkt c von Λ mit der Eigenschaft, daß sich die Kreise $K(a, \bar{a}, c)$ und $K(b, \bar{b}, c)$ in zwei Punkten schneiden.

Dies folgt aus Definition 1.4 von Kapitel I.

1.2 Bemerkung: Dieser Satz gilt auch falls a parallel zu b und $\bar{a}$ parallel zu $\bar{b}$ ist.

1.3 Definition: Vier Punkte $a, \bar{a}, b, \bar{b}$, die auf einem Kreis K liegen, bestimmen ein Konjugium, welches man mit $\kappa(a, \bar{a}, b, \bar{b})$ bezeichnet.

Seien $c, \bar{c}$ Punkte, die nicht auf K liegen und nichtparallel zu $a, \bar{a}, b, \bar{b}$ sind. Dann gehört das ungeordnete Punktepaaar $c, \bar{c}$ zum Konjugium $\xi := \kappa(a, \bar{a}, b, \bar{b})$, falls die Kreise $K(a, \bar{a}, c, \bar{c})$ und $K(b, \bar{b}, c, \bar{c})$ existieren. Der Punkt $\bar{c}$ heißt dann zu c konjugiert unter ξ und wird auch mit c_ξ bezeichnet.

Sei c ein zu a paralleler Punkt. Dann ist der zu c konjugierte Punkt $\bar{c}$ der eindeutig bestimmte Schnittpunkt

der Parallelklasse von $\bar{a}$ mit dem Kreis $K(b, \bar{b}, c)$.
 Seien $c, \bar{c}$ zwei Punkte auf dem Kreis K , die verschieden von $a, \bar{a}, b$ und $\bar{b}$ sind. Weiter sei $d, \bar{d}$ ein Punktepaar außerhalb von K , das zu ξ gehört. Ein solches existiert nach 1.1 Hilfssatz und kann so gewählt werden, daß die vier Punkte $c, \bar{c}, d, \bar{d}$ paarweise nichtparallel sind. Das ungeordnete Punktepaar $c, \bar{c}$ gehört dann zum Konjugium ξ , wenn das Punktepaar $d, \bar{d}$ so gefunden werden kann, daß der Kreis $K(d, \bar{d}, c, \bar{c})$ existiert.

1.4 Bemerkung: Aus der Definition ist ersichtlich:

$\kappa(a, \bar{a}, b, \bar{b}) = \kappa(\bar{a}, a, b, \bar{b}) = \kappa(b, \bar{b}, \bar{a}, a)$. Die Reihenfolge ist also nur modulo einer D_8 bestimmt.

1.5 Definition: Sei K ein Kreis, und seien $a, b, \bar{b}$ drei Punkte auf K . Dann ist das Konjugium $\lambda := \kappa(a, b, \bar{b})$ wie folgt definiert.

Seien $c, \bar{c}$ Punkte, die nicht auf K liegen und nichtparallel zu $a, b, \bar{b}$ sind. Das Punktepaar $c, \bar{c}$ gehört dann zum Konjugium λ , falls der Kreis $K(b, \bar{b}, c, \bar{c})$ existiert und $\bar{c}$ auf dem Kreis $B(c, K, a)$ liegt.

Ist c ein zu b paralleler Punkt, so ist der zu c konjugierte Punkt unter λ $\bar{c}$ der eindeutig bestimmte Schnittpunkt der Parallelklasse von $\bar{b}$ mit dem Kreis $B(c, K, a)$.

Ist c ein zu a paralleler Punkt, so gilt $c_\lambda = \bar{c} = c$.

Sind $c, \bar{c}$ Punkte von K , die verschieden sind von $a, b, \bar{b}$, dann wählt man ein Punktepaar $d, \bar{d}$ außerhalb von K , das zu λ gehört und nichtparallel zu $c, \bar{c}, b, \bar{b}$ ist. Kann das

Punktepaar $d, \bar{d}$ so gefunden werden, daß der Kreis $K(d, \bar{d}, c, \bar{c})$ existiert und $c, \bar{c}$ die Schnittpunkte dieses Kreises mit K sind, so gehören $c, \bar{c}$ zum Konjugium λ .

1.6 Definition: Ist K ein Kreis, und sind a, b zwei Punkte auf K , so definiert man das Konjugium $\mu := \kappa(a, K, b)$ folgendermaßen:

Sind $c, \bar{c}$ Punkte, die nicht auf K liegen und nichtparallel zu a und b sind, so gehören $c, \bar{c}$ dann zum Konjugium μ , wenn sie die Schnittpunkte des Kreises $B(c, K, a)$ mit dem Kreis $B(c, K, b)$ sind.

Für Punkte c , die parallel zu a oder b sind, gilt $c_\mu = \bar{c} = c$.

Ist c ein Punkt auf dem Kreis K , und $d, \bar{d}$ ein Punktepaar außerhalb von K mit $\{d, \bar{d}\} = B(d, K, a) \cap B(d, K, b)$, so gilt für den konjugierten Punkt c_μ , falls c nichtparallel zu d und $\bar{d}$ ist: $\{c, c_\mu\} = K \cap K(c, d, \bar{d})$.

1.7 Proposition: Ist K ein definierender Kreis eines Konjugiums und c ein Punkt auf K , so ist der zu c konjugierte Punkt $\bar{c}$ unabhängig vom Hilfspunktepaar $d, \bar{d}$.

Beweis: a) Sei das Konjugium $\xi := \kappa(a, \bar{a}, b, \bar{b})$ mit den Punkten $a, \bar{a}, b, \bar{b}$ auf dem Kreis K und die Hilfspunktepaare seien $d, \bar{d}$ bzw. $e, \bar{e}$ mit den Kreisen $K(a, \bar{a}, d, \bar{d})$, $K(b, \bar{b}, d, \bar{d})$, $K(a, \bar{a}, e, \bar{e})$, $K(b, \bar{b}, e, \bar{e})$. Existiert dann für ein Punktepaar $c, \bar{c}$ auf K der Kreis $K(c, \bar{c}, d, \bar{d})$, so folgt aus dem Büschelsatz die Existenz des Kreises $K(d, \bar{d}, e, \bar{e})$ oder,

falls d parallel zu e ist, die Parallelität von $\bar{d}$ und $\bar{e}$. Eine nochmalige Anwendung des Büschelsatzes ergibt die Existenz des Kreises $K(c, \bar{c}, e, \bar{e})$ und damit die Unabhängigkeit vom Hilfspunktepaaar $d, \bar{d}$.

b) Sei das Konjugium $\lambda := \kappa(a, b, \bar{b})$ mit den Punkten $a, b, \bar{b}$ auf dem Kreis K , und die Hilfspunktepaaare seien $d, \bar{d}$ bzw. $e, \bar{e}$ mit den Kreisen $K(a, d, \bar{d}) = B(d, K, a)$, $K(b, \bar{b}, d, \bar{d})$, $K(a, e, \bar{e}) = B(e, K, a)$, $K(b, \bar{b}, e, \bar{e})$. Existiert für ein Punktepaar $c, \bar{c}$ auf K der Kreis $K(c, \bar{c}, d, \bar{d})$, so folgt aus 2.6 Proposition die Existenz von $K(d, \bar{d}, e, \bar{e})$, oder, falls d zu e parallel ist, die Parallelität von $\bar{d}$ und $\bar{e}$. Wie oben folgt dann das Verlangte.

c) Sei das Konjugium $\mu := \kappa(a, K, b)$ mit den Punkten a, b auf dem Kreis K , und die Hilfspunktepaaare seien $d, \bar{d}$ bzw. $e, \bar{e}$ mit den Kreisen $K(a, d, \bar{d}) = B(d, K, a)$, $K(b, d, \bar{d}) = B(d, K, b)$, $K(a, e, \bar{e}) = B(e, K, a)$, $K(b, e, \bar{e}) = B(e, K, b)$. Es existiere nun für ein Punktepaar $c, \bar{c}$ auf K der Kreis $K(c, \bar{c}, d, \bar{d})$. Nach 2.9 Proposition wirken die Involutionen $\beta_{a, K}$ und $\beta_{b, K}$ gleich auf dem Kreis $K(d, \bar{d}, e)$, da sie beide d auf $\bar{d}$ abbilden. Also gilt $e' = \beta_{a, K}(e) = \beta_{b, K}(e)$ und daraus folgt die Gleichheit von e' und $\bar{e}$ und damit die Existenz des Kreises $K(d, \bar{d}, e, \bar{e})$. Ist d zu e parallel, so folgt analog b) die Parallelität von $\bar{d}$ und $\bar{e}$. Im ersten Fall folgt nach 2.6 Proposition die Existenz des gesuchten Kreises $K(c, \bar{c}, e, \bar{e})$.

Im zweiten Fall wähle man ein weiteres Hilfspunktepaar $e^{\times}, \bar{e}^{\times}$, so daß $e^{\times}, \bar{e}^{\times}$ nichtparallel zu $e, \bar{e}$ und $d, \bar{d}$ sind. Nach obigem folgt die Existenz des Kreises $K(e^{\times}, \bar{e}^{\times}, c, \bar{c})$.

Wendet man diesen Schluß nochmals an, so folgt die Existenz des Kreises $K(e, \bar{e}, c, \bar{c})$ und damit das Verlangte.

1.8 Definition: Sind $a, \bar{a}, b, \bar{b}$ Punkte, so daß a parallel zu b , $\bar{a}$ parallel zu $\bar{b}$ und $\bar{a}$ nichtparallel zu a sind, so ist das Konjugium $\xi := \kappa(a, \bar{a}, b, \bar{b})$ wie folgt definiert. Sind $c, \bar{c}$ Punkte, so daß die Punkte $c, \bar{c}, a, \bar{a}$ paarweise nichtparallel sind, dann gehören $c, \bar{c}$ zum Konjugium ξ , falls gilt $\{c, \bar{c}\} = K(a, \bar{a}, c) \cap K(b, \bar{b}, c)$. Ist c zu a und ist $\bar{c}$ zu $\bar{a}$ parallel, so gehört das Paar $c, \bar{c}$ dann zum Konjugium ε , wenn ein Punktepaar $d, \bar{d}$ existiert, das zum Konjugium ξ gehört und konzyklisch mit $c, \bar{c}$ liegt.

1.9 Bemerkung: In obiger Definition ist c_ξ unabhängig vom Hilfspunktepaar $d, \bar{d}$.

Denn ist $e, \bar{e}$ ein weiteres Punktepaar, das zum Konjugium ξ gehört, und sind die Punkte $d, \bar{d}, e, \bar{e}$ paarweise nichtparallel, so betrachtet man die Involutionen $\alpha_{a, \bar{a}}$ und $\alpha_{c, \bar{c}}$ bzw. $\alpha_{b, \bar{b}}$ und $\alpha_{c, \bar{c}}$ mit jeweils konzyklischen Zentren in ihrer Wirkung auf den Kreis $K(d, \bar{d}, e)$ und wendet 2.4 Bemerkung an. Daraus ergibt sich die Existenz des Kreises $K(e, \bar{e}, c, \bar{c})$ und damit das Verlangte.

Sind die Hilfspunkte paarweise parallel, so wählt man sich ein weiteres Hilfspunktepaar, bei dem keine Parallelitäten auftreten, und wendet obigen Schluß zweimal an.

1.10 Definition: Sind a und b parallele Punkte auf den Kreisen

K bzw. L , so ist das Konjugium $v := \kappa(a, K, b, L)$ wie folgt definiert.

Sind $c, \bar{c}$ Punkte, die nichtparallel sind zu a , so gehört das Punktepaar $c, \bar{c}$ dann zum Konjugium v , wenn $\bar{c}$ auf den Kreisen $B(c, K, a)$ und $B(c, L, b)$ liegt.

Ist c parallel zu a , so gilt $c_v = \bar{c} = c$.

1.11 Proposition: Jedes Konjugium $\xi := \kappa(a, \bar{a}, b, \bar{b})$ mit den konzyklischen vier Punkten $a, \bar{a}, b, \bar{b}$ ist identisch mit dem Konjugium $\pi := \kappa(a, \bar{a}, d, \bar{d})$, wenn $d, \bar{d}$ ein Punktepaar ist, das zum Konjugium ξ gehört.

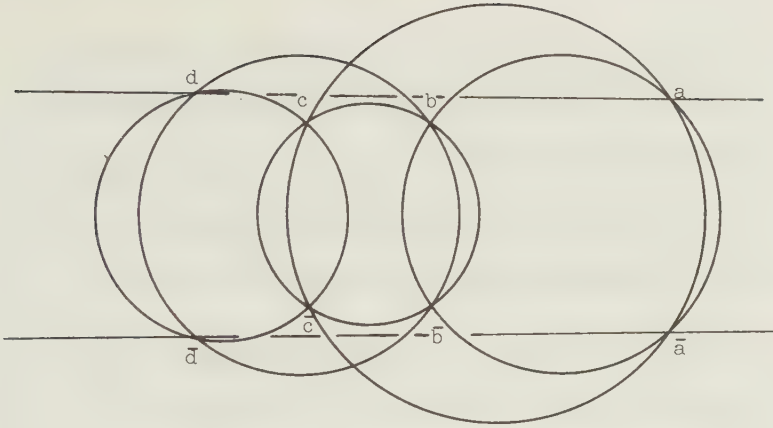
Beweis: Es wird jeweils ein Punkt c betrachtet und die Gleichheit von c_ξ und c_π gezeigt.

1) Sei c ein Punkt, der nicht auf dem Kreis $K := K(a, \bar{a}, b, \bar{b})$ liegt und für den c_ξ ungleich c ist. Weiter sei c nichtparallel zu $a, \bar{a}, b, \bar{b}$, das heißt es gilt $\{c, c_\xi\} = K(a, \bar{a}, c) \cap K(b, \bar{b}, c)$.

a) Sei nun $d, \bar{d}$ ein Punktepaar mit $\{d, \bar{d}\} = K(a, \bar{a}, d) \cap K(b, \bar{b}, d)$ und sei d ungleich $\bar{d}$.

i) Ist d nicht parallel zu c und $\bar{c}$, dann folgt aus der Existenz der Kreise $K(a, \bar{a}, b, \bar{b})$, $K(a, \bar{a}, c, \bar{c})$, $K(b, \bar{b}, c, \bar{c})$, $K(a, \bar{a}, d, \bar{d})$ aus dem Büschelsatz die Existenz des Kreises $K(c, \bar{c}, d, \bar{d})$. Also gilt $c_\xi = c_\pi$.

ii) Ist der Punkt c parallel zu d , dann folgt, wenn man die Büschelinvolutionen $\alpha_{a, \bar{a}}$ und $\alpha_{d, \bar{d}}$ mit den konzyklischen Zentren $a, \bar{a}, d, \bar{d}$ betrachtet in ihrer Wirkung auf den Kreis $K(b, \bar{b}, c, \bar{c})$ aus dem Büschelsatz, daß $\bar{c}$ zu $\bar{d}$ parallel ist. Es gilt also $\bar{c} = c_\xi = c_\pi$.



b) Sei $d, \bar{d}$ ein Punktepaar, so daß d bzw. $\bar{d}$ parallel zu a bzw. $\bar{a}$ sind und der Kreis $K(b, \bar{b}, d, \bar{d})$ existiert. Dann bilden die Büschelinvolutionen $\alpha_{a, \bar{a}}$ und $\alpha_{c, \bar{c}}$ mit den konzyklischen Zentren $a, \bar{a}, c, \bar{c}$ den Punkt b des Kreises $K(b, \bar{b}, d, \bar{d})$ gleich ab. Es folgt also $\alpha_{a, \bar{a}}(d) = \bar{d} = \alpha_{c, \bar{c}}(d)$ und damit die Existenz des Kreises $K(c, \bar{c}, d, \bar{d})$. Es gilt damit $\bar{c} = c_{\xi} = c_{\pi}$.

c) Ist $d, \bar{d}$ ein Punktepaar, so daß d bzw. $\bar{d}$ zu b bzw. $\bar{b}$ parallel sind und der Kreis $K(a, \bar{a}, d, \bar{d})$ existiert, so schließt man analog b), indem man die Büschelinvolutionen $\alpha_{b, \bar{b}}$ und $\alpha_{c, \bar{c}}$ in ihrer Wirkung auf den Kreis $K(a, \bar{a}, d, \bar{d})$ betrachtet.

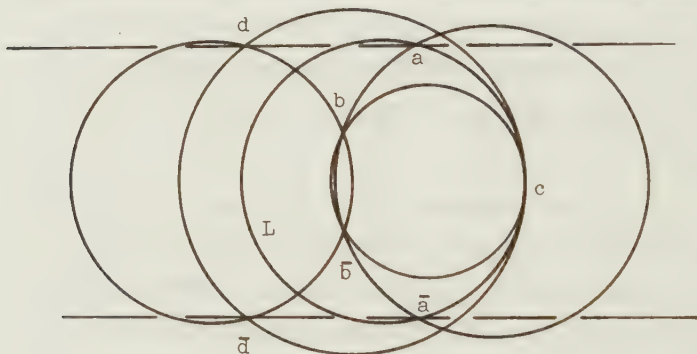
d) Sei nun d gleich $\bar{d}$, das heißt, die Kreise $K(a, \bar{a}, d)$ und $K(b, \bar{b}, d)$ berühren sich im Punkt d . Dann werden diese Kreise nach 2.5 Proposition vom Kreis $K(c, \bar{c}, d)$ berührt. Setzt man $\pi := \kappa(d, a, \bar{a})$, so gilt $c = c_{\xi} = c_{\pi}$.

2) Sei nun c gleich $\bar{c}$, das heißt, die Kreise $L := K(a, \bar{a}, c)$ und $M := K(b, \bar{b}, c)$ berühren sich. $d, \bar{d}$ sei ein Punktepaar, das zum Konjugium ξ gehört.

a) Es gelte $\{d, \bar{d}\} = K(a, \bar{a}, d) \cap K(b, \bar{b}, d)$ und es sei d ungleich $\bar{d}$. Nach 2.5 Proposition berührt dann auch der Kreis $K(d, \bar{d}, c)$ die Kreise $K(a, \bar{a}, c)$ und $K(b, \bar{b}, c)$, und es folgt $c = c_\xi = c_\pi$.

b) d sei nun zu a und $\bar{d}$ sei zu $\bar{a}$ parallel. Aus 2.8 Korollar folgt, daß der Kreis $K(d, \bar{d}, c)$ den Kreis L in c berührt, wenn man die Involutionen $\beta_{c, L}$ und $\alpha_{a, \bar{a}}$ betrachtet, die den Punkt b des Kreises $K(b, \bar{b}, d, \bar{d})$ gleich abbilden. Also folgt $c = c_\xi = c_\pi$.

c) Der Fall, daß $b, \bar{b}$ die Rollen von $a, \bar{a}$ in b) übernehmen,



folgt analog.

d) Ist d gleich $\bar{d}$, das heißt, die Kreise $D := K(a, \bar{a}, d)$ und $K(b, \bar{b}, d)$ berühren sich, so folgt analog b), daß der Kreis $B(d, L, c)$ auch den Kreis D berührt. Mit $\pi := \kappa(d, a, \bar{a})$ ergibt sich $c = c_\xi = c_\pi$.

e) Ist c zu d parallel, so folgt aus der Definition der Konjugien das Verlangte.

3) Sei nun c parallel zu a . Dann liegt $\bar{c}$ auf dem Kreis $K(b, \bar{b}, c)$ und ist parallel zu $\bar{a}$.

a) Ist $d, \bar{d}$ ein Punktepaar mit $\{d, \bar{d}\} = K(a, \bar{a}, d) \cap K(b, \bar{b}, d)$, und ist d ungleich $\bar{d}$, dann bilden die Büschelinvolutionen $\alpha_{a, \bar{a}}$ und $\alpha_{d, \bar{d}}$ den Punkt b des Kreises $K(b, \bar{b}, c, \bar{c})$ gleich ab. Also existiert der Kreis $K(d, \bar{d}, c, \bar{c})$ und es folgt das Verlangte.

b) Sei nun d parallel zu a , und $\bar{d}$ liege auf dem Kreis $K(b, \bar{b}, d)$ und sei parallel zu $\bar{a}$. Dann ist $\bar{c}$ parallel zu $\bar{d}$ und liegt auf dem Kreis $K(b, \bar{b}, c)$. Nach 1.9 Bemerkung folgt das Verlangte.

c) Sei jetzt d parallel zu b und $\bar{d}$ liege auf dem Kreis $K(a, \bar{a}, d)$ parallel zu $\bar{b}$.
Schneiden sich die Kreise $K(b, \bar{b}, c)$ und $K(d, \bar{d}, c)$ in einem von $\bar{c}$ verschiedenen Punkt c^* , so folgt aus 2.6 Proposition die Parallelität von $\bar{c}$ und c^* und damit deren Gleichheit. Also existiert der Kreis $K(d, \bar{d}, c, \bar{c})$ und es ergibt sich das Verlangte.

d) Sei nun d gleich $\bar{d}$, das heißt die Kreise $K(a, \bar{a}, d)$ und $K(b, \bar{b}, d)$ berühren sich. Schnitten sich die Kreise $K(b, \bar{b}, d)$ und $K(c, \bar{c}, d)$ in den zwei Punkten d und d^* , so folgte die Existenz des Kreises $K(a, \bar{a}, d, d^*)$ im Widerspruch zur Voraussetzung, wenn man die Involutionen $\alpha_{c, \bar{c}}$ und α_{d, d^*} mit konzyklischen Zentren in ihrer Wirkung auf den Kreis $K(a, \bar{a}, b, \bar{b})$ betrachtet. Also berührt der Kreis $K(c, \bar{c}, d)$ den Kreis $K(b, \bar{b}, d)$ und damit den Kreis L . Es ergibt sich also $\bar{c} = c_{\xi} = c_{\pi}$.

4) Sei nun c parallel zu b . Dann liegt $\bar{c}$ auf dem Kreis

$K(a, \bar{a}, c)$ und ist parallel zu $\bar{b}$.

Der Beweis verläuft in allen Fällen wie in 3).

1.12 Proposition: Jedes Konjugium $\lambda := \kappa(a, b, \bar{b})$ mit den konzyklischen Punkten $a, b, \bar{b}$ ist identisch mit dem Konjugium π , welches dadurch entsteht, daß man in λ a oder $b, \bar{b}$ durch ein Punktepaar $d, \bar{d}$ ersetzt, das zum Konjugium λ gehört.

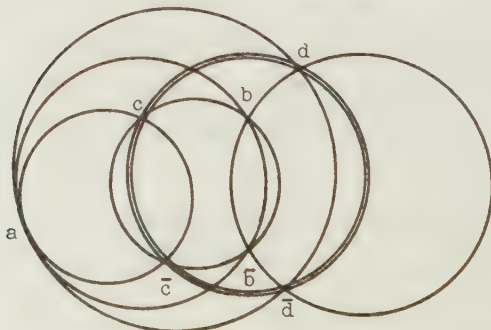
Beweis: Es wird jeweils die Gleichheit von c_λ und c_π für einen beliebigen Punkt c gezeigt.

A) Zunächst wird der Punkt a durch ein Punktepaar $d, \bar{d}$ ersetzt, das zum Konjugium λ gehört.

1) Sei c ein Punkt, der nicht auf dem Kreis $K := K(a, b, \bar{b})$ liegt und für den c_λ ungleich c ist. Weiter sei c nichtparallel zu $a, b, \bar{b}$, das heißt, es gilt $\{c, c_\lambda\} = K(b, \bar{b}, c) \cap B(c, K, a)$.

a) Sei nun $d, \bar{d}$ ein Punktepaar mit $\{d, \bar{d}\} = K(b, \bar{b}, d) \cap B(d, K, a)$ und es sei d ungleich $\bar{d}$.

i) Ist d nichtparallel zu c und $\bar{c}$, dann folgt nach 2.6 Proposition die Existenz des Kreises $K(c, \bar{c}, d, \bar{d})$, und mit $\pi := \kappa(b, \bar{b}, d, \bar{d})$ gilt $c_\lambda = c_\pi$.

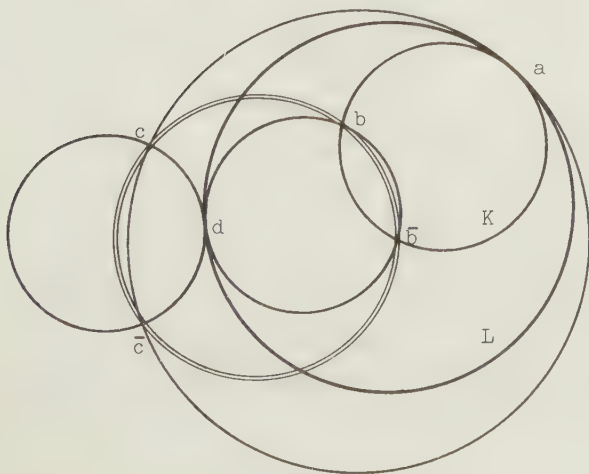


ii) Ist c parallel zu d , dann folgt, daß $\bar{c}$ parallel zu $\bar{d}$ ist, wenn man die Involutionen $\beta_{a,L}$ und $\alpha_{d,\bar{d}}$ mit $L := K(a,d,\bar{d})$ in ihrer Wirkung auf den Kreis $K(b,\bar{b},c,\bar{c})$ betrachtet, dessen Punkt b sie gleich abbilden. Wie oben gilt also $\bar{c} = c_\lambda = c_\pi$.

b) Ist $d, \bar{d}$ ein Punktepaar, das zu λ gehört, und sind d bzw. $\bar{d}$ parallel zu b bzw. $\bar{b}$, dann folgt das Verlangte wie in 1b) des Beweises von 1.11 Proposition, wenn man 2.7 Korollar verwendet.

c) Sei nun d gleich $\bar{d}$.

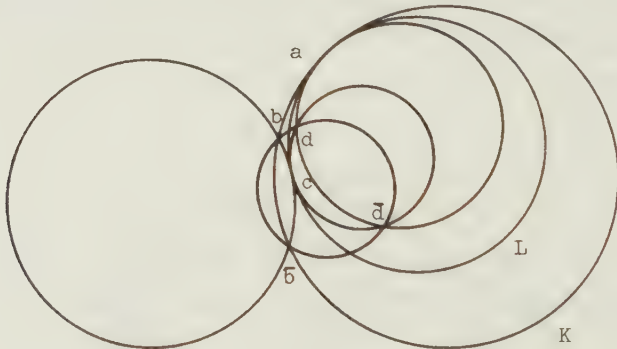
i) Ist d nichtparallel zu a , so berühren sich die Kreise $K(b,\bar{b},d)$ und $L := B(d,K,a)$. Dann bilden die Involutionen $\beta_{d,L}$ und $\beta_{a,L}$ den Punkt b des Kreises $K(b,\bar{b},c,\bar{c})$ gleich ab. Also berührt nach 2.9 Proposition der Kreis $K(c,\bar{c},d)$ den Kreis $K(b,\bar{b},d)$. Mit $\pi := \kappa(d,b,\bar{b})$ folgt $\bar{c} = c_\lambda = c_\pi$.



ii) Ist d parallel zu a , so berührt der Kreis $K(c, \bar{c}, d)$ den Kreis $K(b, \bar{b}, d)$, und mit $\pi := \kappa(b, \bar{b}, d)$ folgt $c_\lambda = c_\pi$. Denn die Involutionen $\alpha_{c, \bar{c}}$ und $\beta_{a, S}$ mit $S := K(c, \bar{c}, a)$ bilden den Punkt a des Kreises $K(b, \bar{b}, d)$ gleich ab und damit auch den Punkt d .

2) Sei nun c gleich $\bar{c}$, und sei K der Kreis $K(a, b, \bar{b})$. Ist c nichtparallel zu a , so berührt der Kreis $L := B(c, K, a)$ den Kreis $K(b, \bar{b}, c)$.

a) Falls $K(b, \bar{b}, d) \cap B(d, K, a) = \{d, \bar{d}\}$ mit d ungleich $\bar{d}$ ist, dann stimmen die Involutionen $\beta_{c, L}$ und $\beta_{a, L}$ auf dem Kreis $K(b, \bar{b}, d, \bar{d})$ im Punkt b überein; also berührt nach 2.9 Proposition der Kreis $K(d, \bar{d}, c)$ den Kreis L und somit auch den Kreis $K(b, \bar{b}, c)$. Mit $\pi := \kappa(b, \bar{b}, d, \bar{d})$ folgt $c = c_\lambda = c_\pi$.



b) Seien nun d zu b und $\bar{d}$ zu $\bar{b}$ parallel. Sei $f, \bar{f}$ ein Punktepaar auf dem Kreis $K(d, \bar{d}, a)$, das zum Konjugium λ gehört. Dann läßt sich das Konjugium $\pi := \kappa(b, \bar{b}, f, \bar{f})$ definieren. Es gilt dann $a_\pi = a$ und somit folgt $\pi = \lambda$ nach 1.11 Proposition. Aus $c_\lambda = c$ ergibt sich dann $c_\pi = c$.

Nach 1.11 Proposition folgt weiter $\pi = \kappa(b, \bar{b}, d, \bar{d})$ und damit das Verlangte.

c) Sei nun d gleich $\bar{d}$, und L sei der Kreis $B(c, K, a)$.

Dann folgt das Verlangte wie in a).

3) Sei wieder c gleich $\bar{c}$, und es sei K der Kreis $K(a, b, \bar{b})$.
 c sei nun zu a parallel.

a) Nun gelte $K(b, \bar{b}, d) \cap B(d, K, a) = \{d, \bar{d}\}$ mit d ungleich $\bar{d}$. Dann bilden die Involutionen $\alpha_{b, \bar{b}}$ und $\beta_{a, K}$ den Punkt d des Kreises $M := K(d, \bar{d}, c)$ gleich ab und damit nach 2.8 Korollar auch den Punkt c ; das heißt, der Kreis $K(b, \bar{b}, c)$ berührt den Kreis M . Mit $\pi := \kappa(b, \bar{b}, d, \bar{d})$ folgt $c = c_\lambda = c_\pi$.

b) Seien nun d zu b und $\bar{d}$ zu $\bar{b}$ parallel, und das Punktepaar $d, \bar{d}$ gehöre zu λ .

Sei nun $e, \bar{e}$ ein Punktepaar mit der Eigenschaft, daß der Kreis $K(e, \bar{e}, b, \bar{b})$ existiert und der Kreis $K(e, \bar{e}, a)$ gleich dem Kreis $B(e, K, a)$ ist. Dann folgt aus a) mit $\pi' := \kappa(b, \bar{b}, e, \bar{e})$ $c_\pi = c_\lambda$. Aus 1.11 Proposition ergibt sich mit $\pi := \kappa(b, \bar{b}, d, \bar{d})$ $c_{\pi'} = c_\pi$.

c) Der Fall, daß d gleich $\bar{d}$ ist, folgt analog b).

4) Seien schließlich c zu b und $\bar{c}$ zu $\bar{b}$ parallel, und der Kreis $K(c, \bar{c}, a)$ berühre den Kreis $K := K(a, b, \bar{b})$. $d, \bar{d}$ sei ein Punktepaar, welches zu λ gehört, und d sei ungleich $\bar{d}$.

a) Sei nun d nicht zu b und $\bar{b}$ parallel,

Die Kreise $K(d, \bar{d}, a)$ und $K(c, \bar{c}, a)$ berühren beide den Kreis K im Punkt a und berühren sich damit auch gegenseitig.

Dann stimmen die Involutionen $\alpha_{b, \bar{b}}$ und $\alpha_{d, \bar{d}}$ auf dem

Kreis $K(c, \bar{c}, a)$ im Punkt a überein, wirken also nach 2.7 Korollar auf diesem Kreis identisch. Also existiert der Kreis $K(c, \bar{c}, d, \bar{d})$ und mit $\pi := \kappa(b, b, d, d)$ folgt $c_\lambda = c_\pi = \bar{c}$.

b) Seien jetzt d zu b und $\bar{d}$ zu $\bar{b}$ parallel.

Sei $e, \bar{e}$ ein Punktepaar, das zum Konjugium λ gehört, mit der Eigenschaft, daß e und $\bar{e}$ nichtparallel zu b und $\bar{b}$ sind. Nach dem bereits Bewiesenen folgt mit $\pi := \kappa(b, \bar{b}, e, \bar{e})$ $\bar{d} = d_\pi$ und $\bar{c} = c_\pi$. Mit 1.11 Proposition folgt $\pi = \kappa(b, \bar{b}, d, \bar{d})$ und somit das Verlangte.

c) Nun sei d gleich d_λ . Es seien nun $e, \bar{e}$ Punkte auf dem Kreis $K(c, \bar{c}, a)$ so gewählt, daß der Kreis $K(b, \bar{b}, e, \bar{e})$ existiert. Zu dem Konjugium $\pi := \kappa(b, \bar{b}, e, \bar{e})$ gehört dann der Punkt a , das heißt, es gilt $a_\pi = a$. Nach 1.11 Proposition gilt $\pi = \kappa(a, b, \bar{b})$. Wendet man 1.11 Proposition nochmals an, so ergibt sich $\pi = \kappa(d, b, \bar{b})$ und damit das Verlangte.

B) Nun werden die Punkte $b, \bar{b}$ durch ein Punktepaar $d, \bar{d}$ ersetzt, das zum Konjugium λ gehört.

1) Sei c ein Punkt, der nicht auf dem Kreis $K := K(b, \bar{b}, a)$ liegt und für den c_λ ungleich c ist. Es gelte $\{c, c_\lambda\} = K(b, \bar{b}, c) \cap B(c, K, a)$.

a) Ist d ungleich d_λ , so schließt man jeweils wie in Teil A), indem man an die Stelle von λ das Konjugium $\kappa(a, d, \bar{d})$ setzt und die Gleichheit mit dem Konjugium $\kappa(b, \bar{b}, d, \bar{d})$ folgert.

b) Sei nun d gleich d_λ .

i) Ist d nichtparallel zu a , so berühren sich die Kreise $K(b, \bar{b}, d)$ und $L := B(d, K, a)$. Dann bilden die Involuti-

onen $\beta_{d,L}$ und $\beta_{a,L}$ den Punkt a des Kreises $K(b, \bar{b}, c, \bar{c})$ gleich ab. Also berühren die Kreise $K(c, \bar{c}, d)$ und $K(c, \bar{c}, a)$ den Kreis L , und mit $\pi := \kappa(d, L, a)$ folgt $c_\pi = c_\lambda = \bar{c}$.

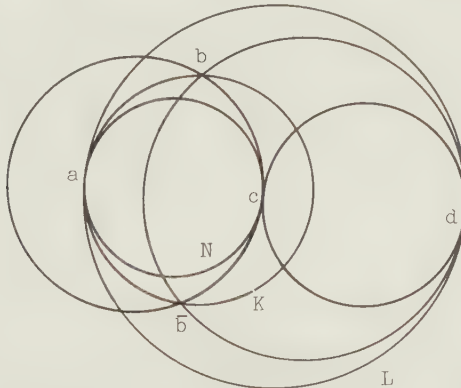
ii) Falls d parallel zu a ist, so berührt wie in A) 1c, ii der Kreis $M := K(c, \bar{c}, d)$ den Kreis $N := K(b, \bar{b}, d)$ und mit $\pi := \kappa(d, N, a, K)$ folgt $c_\pi = c_\lambda = \bar{c}$.

2) Sei nun c gleich c_λ , K sei der Kreis $K(b, \bar{b}, a)$ und c sei nichtparallel zu a .

a) Ist d ungleich d_λ , so folgert man wie in A).

b) Sei nun d gleich d_λ .

i) Ist d nichtparallel zu a , so existieren die Kreise $L := B(d, K, a)$ und $N := B(c, K, a)$. Die Involutionen $\beta_{c,N}$ und $\beta_{a,N}$ bilden dann den Punkt b des Kreises $K(b, \bar{b}, d)$ gleich ab. Also berührt der Kreis $B(d, N, c)$ die Kreise $B(d, N, a) = B(d, K, a)$ und $K(b, \bar{b}, d)$ in d . Also folgt mit



$\pi := \kappa(d, L, a)$ $c_\pi = c_\lambda = c$.

ii) Ist c parallel zu d , so gilt mit $\pi := \kappa(d, L, a)$ nach Definition $c_\pi = c_\lambda = c$.

iii) Ist d parallel zu b , so bilden wie in i) die In-
volutionen $\beta_{c,N}$ und $\beta_{a,N}$, da sie b gleich abbilden auf
dem Kreis $M := K(b, \bar{b}, d)$, den Punkt d gleich ab. Da gilt
 $\beta_{a,N}(d) = d$, berührt der Kreis $B(d, N, c)$ den Kreis M in
 d , und mit $\pi := \kappa(d, M, a, K)$ folgt $c_\pi = c_\lambda = c$.

3) Seien nun c gleich $\bar{c}$, c parallel zu a und K der
Kreis $K(b, \bar{b}, a)$.

a) Ist d ungleich d_λ , so folgert man wie in A).

b) Ist d gleich d_λ und nichtparallel zu a , so gilt mit
 $L := B(d, K, a)$ und $\pi := \kappa(d, L, a)$ $c_\pi = c_\lambda = c$.

c) Ist d gleich d_λ und ist d parallel zu a , so gilt mit
 $L := K(b, \bar{b}, d)$ und $\pi := \kappa(d, L, a, K)$ $c_\pi = c_\lambda = c$.

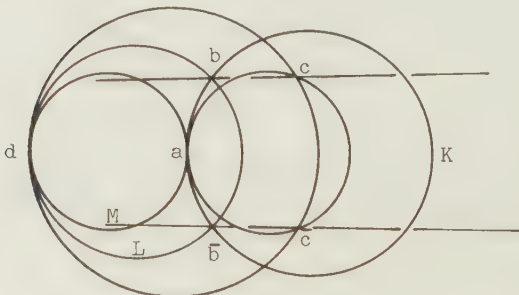
4) Seien nun c parallel zu b und $\bar{c}$ parallel zu $\bar{b}$.

a) Ist d ungleich d_λ , so folgert man wie in A).

b) Ist d gleich d_λ und ist d nichtparallel zu a , so be-
rührt der Kreis $M := B(d, K, a)$ den Kreis $L := K(b, \bar{b}, d)$.

Nach A)4c) berührt der Kreis $K(c, \bar{c}, d)$ den Kreis L eben-
falls in d ; also folgt mit $\pi := \kappa(d, M, a)$ $c_\pi = c_\lambda = \bar{c}$.

c) Ist d gleich d_λ und ist d parallel zu a , so folgt
mit $\pi := \kappa(d, L, a, K)$ $c_\pi = c_\lambda = \bar{c}$.



1.13 Proposition: Jedes Konjugium $\mu := \kappa(a, K, b)$ mit zwei Punkten a, b auf einem Kreis K ist identisch mit dem Konjugium π , welches dadurch entsteht, daß man in der Definition von μ den Punkt a durch ein Punktepaar $d, \bar{d}$ ersetzt, das zum Konjugium μ gehört.

Beweis: Es wird jeweils die Gleichheit von c_μ und c_π für einen beliebigen Punkt c gezeigt.

1) Sei c ein Punkt, der nicht auf K liegt und für den c_μ ungleich c ist.

a) Ist $d, \bar{d}$ ein Punktepaar, das zum Konjugium μ gehört, und ist d ungleich $\bar{d}$, so berühren die Kreise $K(d, \bar{d}, a)$ und $K(d, \bar{d}, b)$ den Kreis K und K und b gehören zu dem Konjugium $\pi := \kappa(a, d, \bar{d})$. Nach 1.12 Proposition ist dann π gleich dem Konjugium μ .

b) Ist d gleich $\bar{d}$, aber ist d nichtparallel zu a oder b , so berührt der Kreis $K(c, \bar{c}, d)$ die Kreise $L := B(d, K, a)$ und $M := B(d, K, b)$. Mit $\pi := \kappa(a, L, d)$ gilt $c_\pi = c_\mu = \bar{c}$.

c) Ist d gleich $\bar{d}$, und ist d parallel zu b , so schließt man wie in b).

d) Ist d gleich $\bar{d}$, und ist d parallel zu a , so folgt mit $\pi := \kappa(a, K, d, M)$ $c_\pi = c_\mu = \bar{c}$.

2) Sei nun c gleich c_μ , und sei c nichtparallel zu a oder b .

a) Ist d ungleich $\bar{d}$, so folgt das Verlangte wie in 1).

b) Sei nun d gleich $\bar{d}$.

i) Ist d nichtparallel zu a , so sei $e, \bar{e}$ ein Punktepaar mit $\{e, \bar{e}\} = B(e, K, a) \cap B(e, K, b)$ und die zwei Punkte $e, \bar{e}$

seien nichtparallel zu d oder c . Dann gilt nach obigem mit $\pi := \kappa(a, e, \bar{e})$ $c_\pi = c_\mu$ und $d_\pi = d_\mu$. Nach 1.12 Proposition folgt dann mit $L := B(d, K, a)$, daß π gleich dem Konjugium $\kappa(d, L, a)$ ist.

ii) Ist d parallel zu a , so wählt man ein Punktepaar $e, \bar{e}$ wie in i). Nach 1.12 Proposition folgt, daß das Konjugium $\pi := \kappa(a, e, \bar{e})$ gleich dem Konjugium $\kappa(a, K, d, L)$ ist mit $L := K(d, e, \bar{e})$. Also ergibt sich $c_\pi = c_\mu = c$.

Da in 2) nicht wesentlich benutzt wurde, daß c nichtparallel zu a oder b ist, folgt somit die Behauptung.

1.14 Proposition: Jedes Konjugium $\xi := \kappa(a, \bar{a}, b, \bar{b})$ mit den parallelen Punkten a, b und $\bar{a}, \bar{b}$ ist gleich dem Konjugium $\pi := \kappa(a, \bar{a}, d, \bar{d})$ und $\pi' := \kappa(d', a, \bar{a})$, wenn das Punktepaar $d, \bar{d}$ zum Konjugium ξ gehört und d' gleich d'_ξ ist.

Beweis: 1) Sei c ein beliebiger Punkt, und sei $d, \bar{d}$ ein Punktepaar, das zum Konjugium ξ gehört und es sei d ungleich $\bar{d}$.

a) Ist d nichtparallel zu a und $\bar{a}$, dann ist das Konjugium $\pi := \kappa(a, \bar{a}, d, \bar{d})$ nach 1.11 Proposition gleich dem Konjugium ξ und es gilt $c_\pi = c_\xi$.

b) Ist d parallel zu a und $\bar{d}$ parallel zu $\bar{a}$, und ist $e, \bar{e}$ ein Hilfspunktepaar, das zum Konjugium ξ gehört, so daß die Kreise $K(e, \bar{e}, a, \bar{a})$, $K(e, \bar{e}, b, \bar{b})$ und $K(e, \bar{e}, d, \bar{d})$ existieren, so ist das Konjugium $\pi := \kappa(e, \bar{e}, a, \bar{a})$ nach 1.11 Proposition gleich dem Konjugium ξ und gleich dem

Konjugium $\kappa(a, \bar{a}, d, \bar{d})$. Es folgt $c_\pi = c_\xi$.

2) Ist d' ein Punkt mit d' gleich d'_ξ , so folgt die Behauptung analog 1a).

1.15 Proposition: Jedes Konjugium $v := \kappa(a, K, b, L)$ mit den zwei parallelen Punkten auf den Kreisen K bzw. L ist durch zwei Punktepaare, die zu ihm gehören, festgelegt.

Beweis: Sei c ein beliebiger Punkt, und sei $d, \bar{d}$ ein Punktepaar, das zum Konjugium v gehört.

a) Ist d ungleich $\bar{d}$, so ist das Konjugium $\pi := \kappa(a, d, \bar{d})$ nach 1.12 Proposition gleich dem Konjugium v und es gilt

$$c_\pi = c_v.$$

b) Ist d gleich $\bar{d}$, und ist d nichtparallel zu a , so ist das Konjugium $\pi := \kappa(d, S, a)$ mit $S := B(d, K, a)$ nach 1.13 Proposition gleich dem Konjugium v und es gilt $c_\pi = c_v$.

c) Ist d parallel zu a , so wähle ein Hilfspunktepaar $e, \bar{e}$ mit $\bar{e} = e_v$, so daß gilt $K(a, e, \bar{e}) = B(e, K, a)$, $K(b, e, \bar{e}) = B(e, L, b)$ und der Kreis $M := K(e, \bar{e}, d)$ existiert. Da das Konjugium $\pi := \kappa(a, e, \bar{e})$ nach 1.12 Proposition gleich dem Konjugium v und gleich dem Konjugium $\kappa(a, K, d, M)$ ist, folgt das Verlangte.

Aus den vorausgehenden Propositionen ergibt sich:

1.16 Theorem: Jedes Konjugium ist durch zwei Punktepaare, die zu ihm gehören, wohlbestimmt.

§ 2 Kreise und Konjugien

2.1 Definition: Ein Kreis K gehört zu einem Konjugium ξ , wenn zwei Punkte a, b auf dem Kreis K existieren mit $a_\xi = b$.

2.2 Bemerkung: Gehört der Kreis K zum Konjugium ξ , so liegt der unter ξ Konjugierte jedes Punktes von K wieder auf dem Kreis.

2.3 Definition: Zwei Konjugien ξ und π sind parallel, wenn für alle Punkte x gilt, daß x_ξ zu x_π parallel ist.

2.4 Proposition: Jeder Kreis gehört zu genau einem Konjugium aus jeder Klasse paralleler Konjugien.

Beweis: Sei K ein Kreis und sei $[\xi]$ eine Klasse zu dem Konjugium ξ paralleler Konjugien. Seien r, s zwei Punkte auf K . Dann definiert man $r_\pi := [r_\xi] \cap K$, $s_\pi := [s_\xi] \cap K$. Somit läßt sich das Konjugium $\pi := \kappa(r, r_\pi, s, s_\pi)$ definieren, zu dem der Kreis K gehört. Zu zeigen bleibt, daß π zu ξ parallel ist.

Angenommen es existiert ein Punkt t , so daß t_ξ nicht zu t_π parallel ist. Dann existiert der Kreis $L := K(t, t_\pi, t_\xi)$. Die Parallelprojektion von K auf L bildet nun r auf r' , s auf s' , r_π auf $(r_\pi)'$, s_π auf $(s_\pi)'$, r_ξ auf $(r_\xi)'$ und s_ξ auf $(s_\xi)'$ ab. Es gilt $(r')_\pi = (r_\pi)' = (r_\xi)' = (r')_\xi$

und ebenso $(s')_{\pi} = (s_{\pi})' = (s_{\xi})' = (s')_{\xi}$. Also ist ξ gleich π , was zum Widerspruch führt.

2.5 Korollar: Zwei parallele Konjugien sind gleich, wenn sie einen Punkt, der nicht festbleibt, gleich abbilden.

2.6 Proposition: Gehört der Kreis K zum Konjugium ξ , und bleibt ein Punkt p von K fest unter ξ , so gehört jeder Kreis, der K in p berührt, zu ξ .

Beweis: Sei nun L ein solcher Kreis, und sei q ein Punkt auf L , so daß weder q noch q_{ξ} parallel zu p sind. Dann existiert der Kreis $M := K(p, q, q_{\xi})$. Da q_{ξ} auf dem Kreis $B(q, K, p) = L$ liegt, ist dieser gleich M . Also gehört der Kreis L zu ξ .

2.7 Bemerkung: Zu jedem Konjugium ξ gibt es ein konzyklisches Punktequadrupel $a, \bar{a}, b, \bar{b}$, so daß gilt $\xi = \kappa(a, \bar{a}, b, \bar{b})$. Denn man wählt ein Punktepaar $a, \bar{a}$ mit $\bar{a} = a_{\xi}$ und legt einen Kreis K durch diese zwei Punkte. Mit 1.4 Definition aus Kapitel I findet man zwei weitere Punkte auf K , die unter ξ konjugiert sind.

§ 3 Die Inzidenzgeometrie Π der Konjugien

3.1 Definition: Der Raum Π der Konjugien der Laguerreebene $\Lambda = (\mathbb{P}, \mathbb{K}, \mathbb{I})$ besteht aus 'Punkten', 'Geraden' und 'Ebenen'.

a) Die 'Punkte' sind die Konjugien zusammen mit den Punkten aus $\mathbb{P}$ und einem 'Punkt' l_∞ , dem uneigentlichen 'Schnittpunkt' der Klassen paralleler Punkte von $\mathbb{P}$.

b) Die 'Geraden' sind ungeordnete Paare nichtparalleler Punkte von $\mathbb{P}$ zusammen mit den Klassen paralleler Punkte und paralleler Konjugien, sowie den Elementen aus dem Fahnenraum von Λ .

c) Die 'Ebenen' sind die Kreise aus $\mathbb{K}$ zusammen mit den ungeordneten Paaren von Klassen paralleler Punkte von $\mathbb{P}$ und 'Ebenen', die durch Angabe einer Parallelklasse von Punkten gekennzeichnet sind.

3.2 Definition: Die Inzidenzstruktur von Π ist folgendermaßen definiert:

a) 'Punkte' - 'Geraden' :

Das Konjugium ξ liegt als 'Punkt' von Π auf der 'Geraden' (a,b) , wobei a,b Punkte aus $\mathbb{P}$ sind, falls a_ξ gleich b ist. ξ liegt auf der 'Geraden' $([\pi])$, wobei π ein Konjugium ist, wenn ξ zu π parallel ist. ξ liegt auf der 'Fahngeraden' (p,K) , wobei p,K ein inzidentes Punkt-Kreis-Paar ist, sofern K zu ξ gehört und p_ξ gleich p ist. Der 'Punkt' ξ inzidiert mit keiner Klasse paralleler Punkte.

Der Punkt x aus $\mathbb{P}$ liegt als 'Punkt' von Π auf der 'Geraden' (a,b) , wenn x gleich a oder b ist. x liegt auf keiner 'Geraden' $([\pi])$. x inzidiert mit der 'Geraden' (p,K) , falls p gleich x ist. x liegt auf der 'Geraden' $([q])$, wobei q ein Punkt aus $\mathbb{P}$ ist, wenn x zu q parallel ist.

Der 'Punkt' l_ω inzidiert mit allen Klassen paralleler Punkte und Konjugien und mit keiner anderen 'Geraden'.

b) 'Geraden' - 'Ebenen' :

Die 'Gerade' (a,b) liegt in der 'Kreisebene' (K) , wenn a,b zwei Punkte auf dem Kreis K sind. (a,b) liegt in der 'Ebene' $([p,q])$, wobei p,q nichtparallele Punkte aus $\mathbb{P}$ sind, falls a zu p und b zu q parallel sind. (a,b) inzidiert nie mit einer 'Ebene', die man durch Angabe einer Klasse paralleler Punkte kennzeichnet.

Die 'Gerade' $([\pi])$ liegt nie in einer 'Kreisebene' (K) . $([\pi])$ liegt in der 'Ebene' $([p,q])$, falls p_π zu q parallel ist. $([\pi])$ liegt in keiner 'Ebene' der dritten Art.

Die 'Gerade' $([s])$ liegt in keiner 'Kreisebene', wobei s ein Punkt aus $\mathbb{P}$ ist. $([s])$ liegt in der 'Ebene' $([p,q])$, wenn s zu p oder q parallel ist. $([s])$ liegt in der 'Ebene' (t) , wobei t ein Punkt aus $\mathbb{P}$ ist, falls t zu s parallel ist.

Die 'Gerade' (r,L) liegt in der 'Kreisebene' (K) , wobei r,L ein inzidentes Punkt-Kreis-Paar ist, wenn K gleich L ist. (r,L) inzidiert nie mit 'Ebenen' $([p,q])$, jedoch mit 'Ebenen' (t) , falls t zu r parallel ist.

c) 'Punkte' - 'Ebenen' :

Der 'Punkt' ξ liegt in der 'Ebene' (K), falls der Kreis K zu ξ gehört. ξ liegt in der 'Ebene' ($[p,q]$), wenn p_ξ parallel zu q ist und ξ liegt in der 'Ebene' (t), falls für alle Punkte u aus $[t]$ u_ξ gleich u ist.

Der 'Punkt' x liegt in der 'Ebene' (K), wenn der Punkt x auf dem Kreis K liegt. x liegt in der 'Ebene' ($[p,q]$), falls x zu p oder q parallel ist. x inzidiert mit der 'Ebene' (t), wenn x zu t parallel ist.

l_∞ liegt in keiner 'Kreisebene', aber sonst in allen 'Ebenen' von Π .

3.3 Bemerkung: Faßt man 'Geraden' und 'Ebenen' als 'Punkt'-Mengen auf, so bleibt obige Definition sinnvoll, das heißt die Inzidenzrelation von Π ist transitiv.

Kapitel III : Nachweis der Axiome des Projektiven Raums
für den Raum

In diesem Kapitel wird nachgewiesen, daß die Geometrie den Axiomen des Projektiven Raums genügt und die Laguerre-geometrie Λ von den Ebenen von Π in den Kreisen und Parallelklassen geschnitten wird.

§ 1 Eindeutige Verbindbarkeit von 'Punkten' und das
Reichhaltigkeitsaxiom

1.1 Proposition: Zu zwei nichtparallelen Konjugien ξ und π existiert genau ein Punktepaa $p, \bar{p}$, so daß gilt $\bar{p} = p_{\xi} = p_{\pi}$.

Beweis: Da die Konjugien ξ und π nichtparallel sind, existiert ein Punkt x aus IP , so daß die Punkte x_{ξ} und x_{π} nichtparallel sind. Sind x, x_{ξ} und x_{π} drei verschiedene Punkte, so existiert der Kreis $K(x, x_{\xi}, x_{\pi})$, der zu beiden Konjugien gehört. Für einen Punkt y , der parallel ist zu x , existiert dann analog der Kreis $K(y, y_{\xi}, y_{\pi})$, der ebenfalls zu ξ und π gehört.

Ist dagegen o. B. d. A. x gleich x_{ξ} , ist ξ gleich $\kappa(a, \bar{a}, b, \bar{b})$ mit den definierenden Punkten $a, \bar{a}, b, \bar{b}$ und bezeichnet man mit L den Kreis $K(a, \bar{a}, x)$, so gehört der Kreis $M := B(x_{\pi}, L, x)$ zu beiden Konjugien. Wie oben findet man einen weiteren solchen Kreis.

Die gefundenen Kreise haben Schnittpunkte $p, \bar{p}$, die das

Verlangte leisten.

Ein weiteres solches Punktepaar kann es nicht geben, da sonst ξ und π gleich wären.

1.2 Hilfssatz: Durch zwei 'Punkte' geht genau eine 'Gerade'.

Beweis: i) Sind die beiden 'Punkte' Konjugien, so folgt die Behauptung nach 1.1 Proposition.

ii) Seien die 'Punkte' nun das Konjugium ξ und der Punkt a aus $\mathbb{P}$. Ist a_ξ von a verschieden, so ist die 'Verbindungsgerade' (a, a_ξ) . Wenn a_ξ dagegen gleich a ist, so wird die 'Verbindungsgerade' durch das Paar (a, K) charakterisiert, wobei K ein Kreis ist, der zu ξ gehört und den Punkt a enthält.

iii) Sind die 'Punkte' das Konjugium ξ und l_∞ , so ist die 'Verbindungsgerade' $([\xi])$.

iv) Sind die 'Punkte' die Punkte a, b von $\mathbb{P}$, so ist die 'Verbindungsgerade' das Punktepaar (a, b) , wenn a nicht-parallel ist zu b , sonst die Parallelklasse $([a])$.

v) Sind die 'Punkte' der Punkt a aus $\mathbb{P}$ und l_∞ , so ist die 'Verbindungsgerade' $([a])$.

Die Eindeutigkeit folgt jeweils aus der Definition der Inzidenz in Π .

1.3 Bemerkung: Es gibt vier nicht koplanare 'Punkte'.

1.4 Hilfssatz: Es existieren zwei windschiefe 'Geraden'.

Beweis: Man betrachte die 'Geraden' (a, b) und (a', A)

mit den Punkten a, b, a' , wobei a nichtparallel ist zu b ,
aber parallel ist zu a' , und dem Kreis A .

§ 2 Das Ebenenaxiom

2.1 Proposition: Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier nicht kollineare, paarweise nichtparallele Konjugien, und schneiden sich die 'Geraden' (α, β) und (γ, δ) in einem 'Punkt', so schneiden sich auch die 'Geraden' (α, γ) und (β, δ) in einem 'Punkt'.

Beweis: Da die auftretenden 'Geraden' 'Punktepaargeraden' oder 'Fahnengeraden' und ihre 'Schnittpunkte' Konjugien oder Punkte aus $\mathbb{P}$ sein können, ist eine Fallunterscheidung erforderlich.

Fall I : Seien die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = (a, b)$ und die
'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, d)$ mit den
Punkten a, b, c, d aus $\mathbb{P}$.

1) Der 'Schnittpunkt' dieser 'Geraden' sei das Konjugium ϵ ; das heißt, es gilt $a_\epsilon = b$ und $c_\epsilon = d$.

a) Seien weiter die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (f, g)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit den
Punkten f, g, h, k aus $\mathbb{P}$.

Zum Beweis muß man folgende Unterscheidungen treffen.

i) Die Punkte a, b, c, d, f, g, h, k sind paarweise nichtparallel.

ii) Der Punkt a ist parallel zu f und damit ist wegen α der Punkt b parallel zu g ; die übrigen Punkte sind paarweise nichtparallel.

iii) Der Punkt a ist parallel zu f und c . Also ist wegen α bzw. ϵ der Punkt b parallel zu g bzw. d . Der Punkt a ist nichtparallel zu h .

- iv) Der Punkt a ist parallel zu c, f und h, und somit ist wegen ϵ bzw. α bzw. β b parallel zu d, g und k.
- v) Der Punkt a ist parallel zu c, und somit ist wegen ϵ der Punkt b parallel zu d. Die übrigen Punkte sind paarweise nichtparallel.
- vi) Der Punkt a ist parallel zu c, und der Punkt c ist parallel zu f. Also ist der Punkt a parallel zu f und c wie in iii).
- vii) Der Punkt a ist parallel zu h, und somit ist wegen β b parallel zu k.
- viii) Der Punkt f ist parallel zu h.

In den Fällen i), ii) und viii) existieren die Kreise $K(a, b, h, k)$, $K(c, d, f, g)$, $K(c, d, h, k)$ und $K(a, b, c, d)$. Die Involutionen $\alpha_{a, b}$ und $\alpha_{h, k}$ mit den konzyklischen Zentren a, b, h, k wirken auf dem Kreis $K(c, d, f, g)$ auf den Punkt c gleich. Da die Involution $\alpha_{a, b}$ den Punkt f auf g abbildet, existiert der Kreis $K(f, g, h, k)$ oder f ist zu h und g ist zu k parallel. Dann ist das Konjugium $\pi := \kappa(f, g, h, k)$ definiert und ist der gesuchte 'Schnittpunkt'.

In den Fällen iii) und vi) betrachtet man die Konjugien β und δ . Es gilt $h_\beta = k = h_\delta$ und $a_\beta = b$, $a_\delta = b'$, wobei b' parallel zu b ist, da a parallel zu c und $c_\delta = d$ parallel zu b sind. Es gilt $b' = K(a, h, k) \cap [b]$. Wegen β existiert der Kreis $K(a, b, h, k)$, und somit ist $b' = b$. Dann ist β gleich δ , was zum Widerspruch führt, oder es gilt $a = h$ und $b = k$, so daß α der gesuchte 'Schnittpunkt' ist.

Im Fall iv) sind f zu h und g zu k parallel. Also ist

$\pi := \kappa(f, g, h, k)$ definiert und der gesuchte 'Schnittpunkt'.

Im Fall v) betrachtet man die Konjugien α und ϵ . Es gilt $c_\alpha = K(c, f, g) \cap [d]$. Wegen γ existiert der Kreis $K(c, d, f, g)$ und somit ist c_α gleich d. Also ist α gleich ϵ oder a fällt mit c und b mit d zusammen, und die fünf Konjugien sind kollinear, was jeweils zum Widerspruch führt. Der Fall vii) folgt wie ii) und iii) durch Vertauschen von α und β .

b) Seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (f, G)$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit den

Punkten h, k aus $\mathbb{P}$ und dem Punkt f auf dem Kreis G.

Man trifft folgende Fallunterscheidung.

i) Die Punkte a, b, c, d, f, h, k sind paarweise nichtparallel.

ii) Der Punkt a ist parallel zu c, und damit ist b parallel zu d.

iii) Der Punkt a ist parallel zu c und h, und damit ist b parallel zu d und k.

iv) Der Punkt a ist parallel zu h, und damit ist b parallel zu k.

v) Der Punkt c ist parallel zu h, und damit ist d parallel zu k.

vi) Der Punkt f ist parallel zu h.

(Jeweils nichterwähnte Punkte sollen keine spezielle Lage haben !)

Fälle, in denen die Punkte a, b, c oder d parallel zu f sind, können nicht eintreten, da diese Punkte unter α bzw. γ bewegt werden, der Punkt f aber festbleibt.

Ist der Kreis $K(a,b,f)$ vom Kreis $K(c,d,f)$ verschieden, wie in den Fällen ii) und iii), so berühren sich diese Kreise und f_e ist gleich f . Daraus folgt die Gleichheit von α , ϵ und γ , was den Voraussetzungen widerspricht. Liegen in den Fällen i), iv) und vi) die Punkte a,b,c,d,f nicht konzyklisch, verfährt man wie eben.

Sonst berührt in den Fällen i) und iv) der Kreis $K(f,h,k)$ den Kreis G , und das gesuchte Konjugium ist $\kappa(f,k,h)$.

Denn schneidet der Kreis $K(f,h,k)$ den Kreis G , so folgte $f_\beta = f_\delta$ und damit die Gleichheit von β und δ .

Im Fall vi) existieren die Kreise $K(a,b,h,k)$ und $K(c,d,h,k)$, und es folgt $h_e = k$. Daraus ergibt sich die Gleichheit von β, ϵ und δ .

Der Fall v) geht analog Fall iv).

c) Seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (f, G)$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$ mit den

Punkten f bzw. h aus $\mathbb{P}$ auf den Kreisen G bzw. K .

Liegen die Punkte a,b,c,d,f nicht konzyklisch, so schließt man wie in b) auf die Gleichheit von α, ϵ und γ . Analog verfährt man, wenn die Punkte a,b,c,d,h nicht auf einem Kreis liegen.

Liegen jedoch die Punkte a,b,c,d,f,h auf einem Kreis L , so ist das gesuchte Konjugium gleich $\kappa(f,L,h)$.

2) Der 'Schnittpunkt' der 'Geraden' (α, β) und der 'Geraden' (γ, δ) sei nun der Punkt e aus $\mathbb{P}$. Also sind die

'Gerade' $(\alpha, \beta) = (a, e)$ und die

'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, e)$ mit den

Punkten a,c,e aus $\mathbb{P}$.

a) Seien weiter die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (f, g)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit den
Punkten f, g, h, k aus $\mathbb{P}$.

Man unterscheidet.

- i) Die Punkte a, c, e, f, g, h, k sind paarweise nichtparallel.
- ii) Der Punkt a ist parallel zu c , die übrigen Punkte sind paarweise nichtparallel.
- iii) Der Punkt a ist parallel zu c und f , und damit ist e parallel zu g .
- iv) Der Punkt a ist parallel zu c, f und h , und damit ist e parallel zu g und k .
- v) Der Punkt a ist parallel zu f , und damit ist wegen α der Punkt e parallel zu g , also ist auch c parallel zu f .
- vi) Der Punkt a ist parallel zu h , und damit ist a parallel zu c .
- vii) Der Punkt c ist parallel zu f , und damit ist a parallel zu f .
- viii) Der Punkt c ist parallel zu h , und damit ist a parallel zu h .
- ix) Der Punkt c ist parallel zu h und f , und damit ist a parallel zu h und f .

Im Fall i) existieren wegen α bzw. γ die Kreise $K_1 := K(a, e, f, g)$ bzw. $K_2 := K(c, e, f, g)$ und somit der Kreis $L := K(a, e, c, f, g)$ und wegen β bzw. δ die Kreise $K_3 := K(a, e, h, k)$ bzw. $K_4 := K(c, e, h, k)$ und somit der Kreis $M := K(a, e, c, h, k)$. Die Kreise L und M sind also identisch, und man kann das Konjugium $\pi := \kappa(f, g, h, k)$ als

den gesuchten 'Schnittpunkt' definieren.

Im Fall ii) existieren die Kreise K_1 und K_2 und damit der Kreis L , und es ist a gleich c , und damit sind alle vier 'Punkte' kollinear.

In den Fällen iii), v) und vii) ist a parallel zu c und f ; also existieren die Kreise K_3 und K_4 und damit der Kreis M , so daß a gleich c ist.

In den Fällen iv) und ix) ist a parallel zu c, f und h , und somit ist e parallel zu g und k , so daß man das Konjugium $\pi := \kappa(f, g, h, k)$ definieren kann.

In den Fällen vi) und viii) ist a parallel zu c und h , und man argumentiert wie in iii).

Im Fall x) existiert wie in Fall i) der Kreis $K(a, c, e, f, g, h, k)$, und somit ist f gleich h und damit der gesuchte 'Schnittpunkt'.

b) Seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (f, G)$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit dem

Punkt f auf dem Kreis G und den Punkten h und k aus $\mathbb{P}$.

Man unterscheidet.

i) Die Punkte a, c, e, f, h, k sind paarweise nichtparallel.

ii) Der Punkt a ist parallel zu c , die übrigen Punkte sind paarweise nichtparallel.

iii) Der Punkt a ist parallel zu c und h .

iv) Der Punkt a ist parallel zu c , und der Punkt f ist parallel zu h .

v) Der Punkt a ist parallel zu h , und damit ist e parallel zu k , und deshalb ist c parallel zu h .

vi) Der Punkt c ist parallel zu h , und damit ist e par-

allel zu k , und deshalb ist a parallel zu h .

vii) Der Punkt f ist parallel zu h .

Im Fall i) existieren wegen β bzw. δ die Kreise $K(a, e, h, k)$ und $K(c, e, h, k)$ und somit der Kreis $K(a, c, e, h, k)$, und wegen α bzw. γ berühren die Kreise $K_1 := K(a, e, f)$ und $K_2 := K(c, e, f)$ den Kreis G , sind also gleich. Somit existiert der Kreis $K(a, c, e, f, h, k)$, der zudem G berührt. Das gesuchte Konjugium $\pi := \pi(f, k, h)$ läßt sich nun definieren.

In den Fällen ii) bis vi) führen die Parallelitäten zusammen mit der Existenz des Kreises $K(a, c, e, f)$ zum Widerspruch.

Im Fall vii) widerspricht die Parallelität der Existenz des Kreises $K(a, c, e, f, h, k)$ nach i).

c) Seien jetzt die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (f, G)$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$ mit dem

Punkt f auf dem Kreis G und dem Punkt h auf dem Kreis K . Man unterscheidet.

i) Die Punkte a, c, e, f, h sind paarweise nichtparallel.

ii) Der Punkt a ist parallel zu c .

iii) Der Punkt a ist parallel zu c , und der Punkt f ist parallel zu h .

iv) Der Punkt f ist parallel zu h .

Im Fall i) berühren wegen β bzw. δ die Kreise $K_1 := K(a, e, h)$ und $K_2 := K(c, e, h)$ den Kreis K , und wegen α bzw. γ berühren die Kreise $K_3 := K(a, e, f)$ und $K_4 := K(c, e, f)$ den Kreis G . Also existieren die Kreise $K_5 := K(a, c, e, h)$

und $K_6 := K(a, c, e, f)$ und der Kreis $K_7 := K(a, c, e, f, h)$,
der sowohl G als auch K berührt. Das gesuchte Konjugium
ist dann $\pi := \kappa(f, K_7, h)$.

In den Fällen ii) und iii) folgt aus der Existenz des
Kreises K_5 die Gleichheit von a und c und somit die Kol-
linearität der Konjugien.

Im Fall iv) folgt aus der Existenz von K_7 die Gleichheit
von f und h . Dieser Punkt ist also der gesuchte 'Schnitt-
punkt'.

Fall II : Seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = (a, b)$ und die
'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, D)$ mit den

Punkten a, b aus $\mathbb{P}$ und dem Punkt c auf dem Kreis D .

1) Der 'Schnittpunkt' dieser 'Geraden' sei das Konju-
gium ϵ , das heißt, es gilt $a_\epsilon = b$ und $c_\epsilon = c$, $D_\epsilon = D$.

a) Seien weiter die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (f, g)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit den

Punkten f, g, h, k aus $\mathbb{P}$.

Man unterscheidet.

i) Die Punkte a, b, c, f, g, h, k sind paarweise nichtpar-
allel.

ii) Der Punkt a ist parallel zu f , und daher ist b par-
allel zu g .

iii) Der Punkt a ist parallel zu h , und daher ist b par-
allel zu k .

iv) Der Punkt f ist parallel zu h .

Liegen in den Fällen i), ii) und iii) die Punkte a, b, f ,
 g, h, k konzyklisch, so läßt sich das gesuchte Konjugium

definieren. Sonst berühren sich die Kreise $K(c, f, g)$, $K(c, h, k)$ und $K(c, a, b)$, und daher gilt $c_\alpha = c = c_\beta$. Also folgt aus 1.16 Theorem $\alpha = \beta$, was zum Widerspruch führt. Im Fall iv) liegen die Punkte f, g, h, k nicht konzyklisch, was wie oben zum Widerspruch führt.

b) Seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (f, G)$ und die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit dem Punkt f auf dem Kreis G und den Punkten h, k aus IP . Man unterscheidet.

- i) Die Punkte a, b, c, f, h, k sind paarweise nichtparallel.
- ii) Der Punkt a ist parallel zu h , und damit ist b parallel zu k .
- iii) Der Punkt a ist parallel zu h , und c ist parallel zu f .
- iv) Der Punkt c ist parallel zu f .
- v) Der Punkt f ist parallel zu h .

Liegen in den Fällen i), ii) und v) die Punkte a, b, f, h, k konzyklisch, so läßt sich das gesuchte Konjugium definieren. Sonst berühren sich die Kreise $B(c, G, f)$, $K(c, h, k)$ und $K(c, a, b)$ den Kreis D , und daher gilt $c_\alpha = c = c_\beta$. Somit folgt aus 1.16 Theorem $\alpha = \beta$.

In den Fällen iii) und iv) folgt wie oben $c_\beta = c$. Außerdem gilt $c_\alpha = c$, was wie oben zum Widerspruch führt.

c) Seien jetzt die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (f, G)$ und die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$ mit dem Punkt f auf dem Kreis G und dem Punkt h auf dem Kreis K . Man unterscheidet.

- i) Die Punkte a, b, c, f, h sind paarweise nichtparallel.
- ii) Der Punkt c ist parallel zu f .
- iii) Der Punkt c ist parallel zu h .
- iv) Der Punkt f ist parallel zu h .
- v) Die Punkte c, f, h sind paarweise parallel.

Liegen im Fall i) die Punkte konzyklisch, so berührt dieser gemeinsame Kreis die Kreise G und K in den Punkten f und h , und das gesuchte Konjugium läßt sich definieren. Liegen f bzw. h nicht auf dem Kreis $K(a, b, c)$, so gilt $f_{\epsilon} = f$ bzw. $h_{\epsilon} = h$. Also folgt $\alpha = \epsilon = \gamma$ bzw. $\beta = \epsilon = \delta$, was zum Widerspruch führt.

In den Fällen ii) und v) gilt $c_{\alpha} = c$ und damit $\alpha = \gamma$.

Im Fall iii) gilt $c_{\beta} = c$ und damit $\beta = \delta$.

Im Fall iv) gilt $f_{\beta} = f$ und damit $\alpha = \beta$.

2) Es seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = (a, e)$ und die 'Gerade' $(\gamma, \delta) = (e, D)$ mit dem Punkt e auf dem Kreis D und dem Punkt a aus IP .

a) Seien weiter die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (f, g)$ und die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit den Punkten f, g, h, k aus IP .

Man unterscheidet.

- i) Die Punkte a, e, f, h, k, g sind paarweise nichtparallel.
- ii) Der Punkt a ist parallel zu f .
- iii) Der Punkt a ist parallel zu h .
- iv) Der Punkt a ist parallel zu f und h .
- v) Der Punkt f ist parallel zu h .

Im Fall i) existieren die Kreise $L := K(a, e, f, g)$ und

$M := K(a, e, h, k)$ wegen α und β und berühren wegen γ und δ den Kreis D im Punkt e . Also sind L und M gleich, und das geforderte Konjugium läßt sich definieren.

Im Fall ii) bzw. iii) folgt die Parallelität von e und g bzw. e und k und damit $g_\gamma = g$ bzw. $k_\delta = k$, was zum Widerspruch führt.

Der Fall iv) folgt wie ii) und iii).

Im Fall v) folgt aus der Parallelität von f und h und der Existenz des Kreises $K(a, e, f, g, h, k)$, daß die vier Konjugien als 'Punkte' kollinear sind.

b) Seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (f, G)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit dem

Punkt f auf dem Kreis G und den Punkten h und k aus $\mathbb{P}$.
Man unterscheidet.

- i) Die Punkte a, e, f, h, k sind paarweise nichtparallel.
- ii) Der Punkt a ist parallel zu h .
- iii) Der Punkt e ist parallel zu f .
- iv) Der Punkt f ist parallel zu h .

Im Fall i) berührt der Kreis $K(e, h, k)$ den Kreis D in e wegen δ und der Kreis $B(e, G, f)$ wegen γ . Außerdem berührt der Kreis $K(a, e, f)$ den Kreis G in f wegen α . Also berührt der Kreis $K(a, e, f)$ die Kreise D und G , und damit existiert der Kreis $L := K(a, e, h, k, f)$. Dann läßt sich das gesuchte Konjugium definieren: $\pi := \kappa(f, k, h)$.

Im Fall ii) ist e parallel zu k wegen β . Dann ist $e_\delta = e$ aber $k_\delta \neq k$, was zum Widerspruch führt.

Im Fall iii) folgt der Widerspruch aus $e_\alpha \neq e$ und $f_\alpha = f$.

Im Fall iv) existiert wie in i) der Kreis L, was zum Widerspruch führt.

c) Seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (f, G)$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$ mit dem

Punkt f auf dem Kreis G und dem Punkt h auf dem Kreis K.

Man unterscheidet.

i) Die Punkte a, e, f, h sind paarweise nichtparallel.

ii) Der Punkt f ist parallel zu h.

Im Fall i) berührt wie in b)i) der Kreis $K(a, e, f)$ die Kreise D und G. Analog schließt man, daß der Kreis $K(a, e, h)$ die Kreise D und K berührt. Also berührt der Kreis $M := K(a, e, h, f)$ die Kreise D, G, K und das Konjugium $\pi := \kappa(f, M, h)$ ist der gesuchte 'Schnittpunkt'.

Im Fall ii) folgt aus der Existenz des Kreises M die Gleichheit von f und h und damit der gesuchte 'Schnittpunkt'.

Fall III : Seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = (a, B)$ und die

'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, D)$ mit dem

Punkt a auf dem Kreis B und dem Punkt c auf dem Kreis D.

1) Der 'Schnittpunkt' dieser 'Geraden' sei das Konjugium ϵ , das heißt, es gilt $a_\epsilon = a$, $B_\epsilon = B$, $c_\epsilon = c$ und $D_\epsilon = D$.

a) Seien weiter die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (f, g)$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit den

Punkten f, g, h, k aus $\mathbb{P}$.

Man unterscheidet.

i) Die Punkte a, c, f, g, h, k sind paarweise nichtparallel.

ii) Der Punkt a ist parallel zu c.

iii) Der Punkt f ist parallel zu h.

In allen Fällen berühren der Kreis $K(a, h, k)$ den Kreis B in a wegen β und der Kreis $K(c, h, k)$ den Kreis D in c wegen δ . Daraus folgt $h_\epsilon = k$ und damit $\beta = \epsilon = \delta$.

b) Seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (f, G)$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit dem

Punkt f auf dem Kreis G und den Punkten h und k aus $\mathbb{P}$.

Man unterscheidet.

i) Die Punkte a, c, f, h, k sind paarweise nichtparallel.

ii) Der Punkt a ist parallel zu c.

iii) Der Punkt a bzw. c ist parallel zu f.

iv) Der Punkt f ist parallel zu h.

In allen Fällen verläuft der Beweis analog a).

c) Seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (f, G)$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$ mit dem

Punkt f auf dem Kreis G und dem Punkt h auf dem Kreis K.

Man unterscheidet.

i) Die Punkte a, c, f, h sind paarweise nichtparallel.

ii) Der Punkt a ist parallel zu c.

iii) Der Punkt a ist parallel zu f.

iv) Der Punkt a ist parallel zu h.

v) Der Punkt f ist parallel zu h.

vi) Der Punkt a ist parallel zu c und f.

vii) Der Punkt a ist parallel zu c, f und h.

In den Fällen i), ii), iv) und v) berühren die Kreise $B(f, B, a)$ und $B(f, D, c)$ den Kreis G im Punkt f. Deshalb

gilt $f_{\epsilon} = f$. Dann ist $\alpha = \epsilon = \gamma$.

In den Fällen iii) und vi) folgt analog $h_{\epsilon} = h$ und damit $\beta = \epsilon = \delta$.

Im Fall vii) läßt sich das Konjugium $\kappa(f, G, h, K)$ als der gesuchte 'Schnittpunkt' definieren.

2) Der 'Schnittpunkt' der 'Geraden' sei nun der Punkt e aus $\mathbb{P}$, das heißt die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = (e, B)$ und die 'Gerade' $(\gamma, \delta) = (e, D)$ mit dem Punkt e auf den Kreisen B und D .

Ist die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$, so berührt der Kreis $K(e, h, k)$ die Kreise B und D . Also berühren sich B und D im Punkt e , das heißt, die 'Punkte' $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ liegen kollinear.

Dasselbe folgt, falls die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (f, G)$ und die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$ ist und f nichtparallel zu h ist. Ist f parallel zu h , so läßt sich wieder das Konjugium $\kappa(f, G, h, K)$ als der gesuchte 'Schnittpunkt' definieren.

2.2 Proposition: Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier nicht kollineare Konjugien, und schneiden sich die 'Geraden' (α, β) und (γ, δ) in einem 'Punkt', so schneiden sich auch die 'Geraden' (α, γ) und (β, δ) in einem 'Punkt'.

Beweis: Man muß wegen 2.1 Proposition nur die Fälle untersuchen, in denen mindestens zwei der Konjugien parallel sind.

Fall I : Sei das Konjugium α parallel zu β , das heißt: die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = ([\alpha])$.

1) Sei weiter die 'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, d)$ mit den Punkten c, d aus $\mathbb{P}$, und der 'Schnittpunkt' der 'Geraden' sei das Konjugium ϵ . Dann ist ϵ zu α parallel, und es gilt $c_\epsilon = d$.

a) Es sei nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (f, g)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit den

Punkten f, g, h, k aus $\mathbb{P}$.

Man unterscheidet.

- i) Die Punkte c, d, f, g, h, k sind paarweise nichtparallel.
- ii) Der Punkt c ist parallel zu f .
- iii) Der Punkt c ist parallel zu h .
- iv) Der Punkt c ist parallel zu f und h .
- v) Der Punkt f ist parallel zu h .

In den Fällen i), ii) und v) existiert wegen δ der Kreis $K(c, d, h, k)$. Da ϵ parallel zu β ist, sind h_ϵ und k parallel. Aus $h_\epsilon = K(h, c, d) \cap [k]$ folgt $h_\epsilon = k$ und somit nach Kapitel II, 2.5 Korollar $\beta = \epsilon = \delta$.

Im Fall iii) folgt analog $f_\epsilon = g$ und daraus $\alpha = \epsilon = \gamma$.

Im Fall iv) sind die Punkte d, g und k paarweise parallel, und das gesuchte Konjugium $\kappa(f, g, h, k)$ läßt sich definieren.

b) Nun seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (f, G)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit den

Punkten h, k aus $\mathbb{P}$ und dem Punkt f auf dem Kreis G .

Man unterscheidet.

- i) Die Punkte c, d, f, h, k sind paarweise nichtparallel.
- ii) Der Punkt c ist zu h parallel.
- iii) Der Punkt f ist zu h parallel.

Die Fälle i) und iii) gehen analog a).

Im Fall ii) gilt $f_{\epsilon} = f$ und damit $\gamma = \epsilon$. Also ist γ zu α parallel, was zum Widerspruch führt.

c) Jetzt seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (f, G)$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$ mit dem

Punkt f auf dem Kreis G und dem Punkt h auf dem Kreis K .

Dann gilt $f_{\epsilon} = f$ und $h_{\epsilon} = h$. Also ist $\gamma = \epsilon = \delta$.

2) Nun ist die 'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, D)$ mit dem Punkt c auf dem Kreis D und der 'Schnittpunkt' der 'Geraden' ist das Konjugium ϵ . Dann ist ϵ zu α parallel, und es gilt

$$c_{\epsilon} = c, D_{\epsilon} = D.$$

a) Es seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (f, g)$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit den

Punkten f, g, h, k aus $\mathbb{P}$.

Man unterscheidet.

i) Die Punkte c, f, g, h, k sind paarweise nichtparallel.

ii) Der Punkt f ist parallel zu h .

In beiden Fällen berührt der Kreis $L := K(c, h, k)$ wegen δ den Kreis D . Da h_{ϵ} zu k parallel ist und auf dem Kreis L liegt, folgt $h_{\epsilon} = k$ und damit $\beta = \epsilon = \delta$.

b) Nun seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (f, G)$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit dem

Punkt f auf dem Kreis G und den Punkten h und k aus $\mathbb{P}$.

Der Beweis geht wie in a).

c) Jetzt seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (f, G)$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$ mit dem

Punkt f auf dem Kreis G und dem Punkt h auf dem Kreis K .

In allen Fällen ist $h_{\epsilon} = h$ und $f_{\epsilon} = f$. Es folgt $\alpha = \epsilon = \beta$.

3) Sei nun die 'Gerade' $(\gamma, \delta) = ([\gamma])$. Der 'Schnittpunkt' der 'Geraden' ist dann entweder das Konjugium ϵ oder der 'Punkt' l_ω . Im ersten Fall gilt $[\alpha] = [\gamma]$, das heißt, alle Konjugien sind als 'Punkte' kollinear. Sonst unterscheidet man.

a) Es seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (f, g)$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit den

Punkten f, g, h, k aus $\mathbb{P}$.

Man unterscheidet.

i) Die Punkte f, g, h, k sind paarweise nichtparallel.

ii) Der Punkt f ist parallel zu h .

Im Fall i) existiert der Kreis $K(f, h, k)$, und er enthält f_β und f_δ . Da β zu α parallel ist, sind f_β und g parallel. Da δ zu γ parallel ist, sind f_δ und g parallel. Also folgt die Gleichheit von f_β und f_δ und von β und δ . Im Fall ii) ist g zu k parallel, und das gesuchte Konjugium $\kappa(f, g, h, k)$ läßt sich definieren.

b) Seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (f, G)$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit dem

Punkt f auf dem Kreis G und den Punkten h und k aus $\mathbb{P}$.

Man unterscheidet.

i) Die Punkte f, h, k sind paarweise nichtparallel.

ii) Der Punkt f ist parallel zu h .

Im Fall i) gilt $f_\beta = f = f_\delta$ und damit $\beta = \delta$.

Im Fall ii) folgt $h_\delta = h$ im Widerspruch zu $h_\delta = k \neq h$.

c) Seien jetzt die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (f, G)$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$ mit den

Punkten f auf dem Kreis G und h auf dem Kreis K .

Man unterscheidet.

- i) Die Punkte f und h sind nichtparallel.
- ii) Der Punkt f ist zu h parallel.

Im Fall i) gehört der Kreis $B(h, G, f)$ zu den Konjugien α und γ nach Kapitel II, 2.6 Proposition. Da gilt $h_\alpha = h_\gamma = h$, folgt $\alpha = \gamma$.

Im Fall ii) läßt sich das Konjugium $\kappa(f, G, h, K)$ definieren.

Fall II : Sei nun das Konjugium α zu γ parallel, das heißt: die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = ([\alpha])$ und die 'Geraden' (α, β) und (γ, δ) schneiden sich im Konjugium ϵ .

- 1) Seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = (a, b)$ und die 'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, d)$ mit den

Punkten a, b, c, d aus $\mathbb{P}$. Dann gilt $a_\epsilon = b$ und $c_\epsilon = d$.

- a) Sei die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit den Punkten h und k aus $\mathbb{P}$.

Man unterscheidet.

- i) Die Punkte a, b, c, d, h, k sind paarweise nichtparallel.
- ii) Der Punkt a ist parallel zu c .
- iii) Der Punkt a ist parallel zu h .
- iv) Der Punkt a ist parallel zu c und h .

In den Fällen i) und iii) existiert der Kreis $K(a, b, c, d)$.

Da α zu γ parallel ist, sind c_α und d parallel. Also folgt $c_\alpha = d$ und analog $a_\gamma = b$. Daraus ergibt sich $\alpha = \gamma$.

Im Fall ii) existieren die Kreise $K(a, b, h, k)$ und $K(c, d, h, k)$. Daraus folgt $h_\epsilon = k$ und damit $\beta = \epsilon = \delta$.

Im Fall iv) betrachtet man einen Kreis L durch h und k . Sei α' das eindeutig bestimmte Konjugium von $[\alpha]$, zu dem L gehört. Da h parallel zu a ist und $a_{\alpha'}$ parallel zu b ist, sind $h_{\alpha'}$ und b parallel. Also gilt $h_{\alpha'} = L \cap [b]$. Da k zu $[b]$ gehört, folgt $h_{\alpha'} = k$. Also ist α' der gesuchte 'Schnittpunkt'.

b) Sei jetzt die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$ mit dem Punkt h auf dem Kreis K .

Man unterscheidet.

i) Die Punkte a, b, c, d, h sind paarweise nichtparallel.

ii) Der Punkt a ist parallel zu c .

Der Fall i) folgt wie in a).

Im Fall ii) berühren die Kreise $K(a, b, h)$ und $K(c, d, h)$ den Kreis K in h und damit einander. Daraus folgt $h_{\epsilon} = h$ und somit $\beta = \epsilon = \delta$.

c) Ist die 'Gerade' $(\beta, \delta) = ([\beta])$, so ist der gesuchte 'Schnittpunkt' l_{ω} .

2) Seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = (a, B)$ und die

'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, d)$ mit den

Punkten c, d aus $\mathbb{IP}$ und dem Punkt a auf dem Kreis B . Dann gilt $a_{\epsilon} = a$, $B_{\epsilon} = B$, $c_{\epsilon} = d$.

a) Weiter sei die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit den Punkten h und k aus $\mathbb{IP}$.

Man unterscheidet.

i) Die Punkte a, c, d, h, k sind paarweise nichtparallel.

ii) Der Punkt c ist parallel zu h .

In beiden Fällen existiert der Kreis $K(a, c, d)$ und berührt

den Kreis B. Dann gilt $a_\gamma = a$ und $c_\alpha = d$, da α zu γ parallel ist. Also folgt $\alpha = \gamma$.

b) Sei nun die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$ mit dem Punkt h auf dem Kreis K. Der Beweis geht wie in a).

3) Nun seien die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = (a, B)$ und die
'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, D)$ mit dem
Punkt a auf dem Kreis B und dem Punkt c auf dem Kreis D.

a) Es sei die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit den Punkten h, k aus $\mathbb{P}$.

Man unterscheidet.

i) Die Punkte a, c, h, k sind paarweise nichtparallel.

ii) Der Punkt a ist parallel zu c.

Im Fall i) berührt wegen ϵ der Kreis $L := B(c, B, a)$ den Kreis D. Dann gehört L zu α und γ , und außerdem ist $a_\gamma = a$ und $c_\alpha = c$. Also folgt $\alpha = \gamma$.

Im Fall ii) berühren die Kreise $K(a, h, k)$ bzw. $K(c, h, k)$ den Kreis B bzw. D. Also gilt $h_\epsilon = k$ und damit $\beta = \epsilon = \delta$.

b) Nun sei die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$ mit dem Punkt h auf dem Kreis K.

Man unterscheidet.

i) Die Punkte a, c, h sind paarweise nichtparallel.

ii) Der Punkt a ist parallel zu c.

iii) Der Punkt a ist parallel zu h.

iv) Die Punkte a, c, h sind paarweise parallel.

Die Fälle i) und iii) gehen analog a)i).

Im Fall ii) berühren die Kreise $B(h, B, a)$ und $B(h, D, c)$ den Kreis K und damit einander. Also folgt $h_\epsilon = h$ und

damit $\beta = \epsilon = \delta$.

Im Fall iv) existiert ein Konjugium α' aus $[\alpha]$, zu dem K gehört. Da h zu a parallel ist, gilt $h_{\alpha'} = h$. Also ist α' der gesuchte 'Schnittpunkt'.

Fall III : Sei wieder das Konjugium α zu γ parallel, das heißt: die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = ([\alpha])$. Nun schneiden sich die 'Geraden' (α, β) und (γ, δ) im Punkt e aus $\mathbb{P}$.

1) Jetzt seien die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = (a, e)$ und die
'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, e)$ mit den
Punkten a, c, e aus $\mathbb{P}$. Dann sind die Punkte a und c parallel.

a) Sei die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit den Punkten h, k aus $\mathbb{P}$.

Man unterscheidet.

i) Die Punkte a, e, h, k sind paarweise nichtparallel.

ii) Der Punkt a ist parallel zu h .

Im Fall i) existieren die Kreise $K(a, e, h, k)$ und $K(c, e, h, k)$ und damit der Kreis $K(a, e, c, h, k)$. Also folgt $a = c$ und damit die Kollinearität der 'Punkte' $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Im Fall ii) betrachtet man das Konjugium α' aus $[\alpha]$, welches einen Kreis durch h und k festläßt. Da a zu h parallel ist, gilt $h_{\alpha'} = k$, und α' ist der gesuchte 'Schnittpunkt'.

b) Sei die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$ mit dem Punkt h auf dem Kreis K .

Die Kreise $K(a, e, h)$ und $K(c, e, h)$ berühren den Kreis K in h , sind also gleich. Also folgt wieder $a = c$.

2) Ist die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = (e, B)$ und die

'Gerade' $(\gamma, \delta) = (e, d)$ mit dem

Punkt e auf dem Kreis B und dem Punkt d aus $\mathbb{P}$, folgt
 $e = d$, was zum Widerspruch führt.

3) Seien jetzt die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = (e, B)$ und die

'Gerade' $(\gamma, \delta) = (e, D)$ mit dem

Punkt e auf den Kreisen B und D .

a) Es sei die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit den Punkten
 h und k aus $\mathbb{P}$.

Dann berührt der Kreis $K(e, h, k)$ die Kreise B und D in e .

Also berühren sich die Kreise B und D , und die Konjugien
 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind als 'Punkte' kollinear.

b) Nun sei die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$ mit dem Punkt h
auf dem Kreis K .

Man unterscheidet.

i) Die Punkte e und h sind nichtparallel.

ii) Der Punkt e ist parallel zu h .

Im Fall i) berührt der Kreis $B(e, K, h)$ die Kreise B und
 D , und man folgert analog a).

Im Fall ii) gilt für das Konjugium α' aus $[\alpha]$, zu dem K
gehört, $h_{\alpha'} = h$ und ist der gesuchte 'Schnittpunkt'.

2.3 Theorem: Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier nichtkollineare 'Punkte', und schneiden sich die 'Geraden' (α, β) und (γ, δ) in einem 'Punkt', so schneiden sich auch die 'Geraden' (α, γ) und (β, δ) in einem 'Punkt'.

Beweis: Wegen 2.2 Proposition müssen nur noch die Fälle betrachtet werden, in denen mindestens einer der 'Punkte' $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ein Punkt aus $\mathbb{P}$ ist.

Fall A : Der 'Punkt' α ist der Punkt a aus $\mathbb{P}$.

I) Es sei die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = (a, b)$ und die 'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, d)$ mit den Punkten b, c, d aus $\mathbb{P}$.

1) Der 'Schnittpunkt' der 'Geraden' sei das Konjugium ϵ , das heißt, es gilt $a_\epsilon = b$, $c_\epsilon = d$.

a) Seien weiter die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, g)$ und die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit den Punkten g, h, k aus $\mathbb{P}$.

Man unterscheidet.

- i) Die Punkte a, b, c, d, h, k sind paarweise nichtparallel.
- ii) Der Punkt a ist parallel zu c .
- iii) Der Punkt a ist parallel zu h .
- iv) Der Punkt b ist parallel zu g .
- v) Der Punkt c ist parallel zu h .
- vi) Der Punkt g ist parallel zu k .
- vii) Die Punkte a, c, h sind paarweise parallel.
- viii) Der Punkt a ist parallel zu c und g ist parallel zu k .

In den Fällen i), ii), iv), vi), viii) existieren die Kreise $K(a, b, h, k)$ und $K(c, d, h, k)$. Also gilt $h_e = k$ und damit $\beta = \epsilon = \delta$.

In den Fällen iii) bzw. v) folgt die Parallelität von b und k bzw. von d und k . Daraus ergibt sich wie oben $h_e = k$ und damit $\beta = \epsilon = \delta$.

Im Fall vii) ist wegen $\gamma \parallel g$ parallel zu d und damit zu k . Also läßt sich das Konjugium $\kappa(a, g, h, k)$ definieren.

b) Seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, G)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit den
Punkten h, k aus $\mathbb{P}$ und dem Kreis G , der a enthält.
Man unterscheidet.

- i) Die Punkte a, b, c, d, h, k sind paarweise nichtparallel.
- ii) Der Punkt a ist parallel zu h .
- iii) Der Punkt c ist parallel zu h .

Der Fall i) folgt analog a)i).

Die Fälle ii) bzw. iii) gehen wie a)iii) bzw. a)v).

c) Seien jetzt die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, g)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$ mit dem
Punkt h auf dem Kreis K und dem Punkt g aus $\mathbb{P}$.
Man unterscheidet.

- i) Die Punkte a, b, c, d, g, h sind paarweise nichtparallel.
- ii) Der Punkt a ist parallel zu c .
- iii) Der Punkt b ist parallel zu g .

Alle Fälle folgen analog a)i).

d) Seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, G)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$.

In diesem Fall berühren die Kreise $K(a,b,h)$ und $K(c,d,h)$ den Kreis K im Punkt h und damit einander. Also gilt $h_{\epsilon} = h$ und damit $\beta = \epsilon = \delta$.

e) Jetzt seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, g)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = ([\beta])$ mit dem
Punkt g aus $\mathbb{P}$.

Man unterscheidet.

- i) Die Punkte a, b, c, d, g sind paarweise nichtparallel.
- ii) Der Punkt a ist parallel zu c .
- iii) Der Punkt b ist parallel zu g .

Im Fall i) existieren die Kreise $K(a,b,c,d)$ und $K(a,g, c,d)$, also der Kreis $K(a,b,c,d,g)$, der zu δ gehört. Da δ zu β parallel ist, folgt $a_{\delta} = b$ und damit $\beta = \delta$.

In den Fällen ii) und iii) betrachte man das Konjugium β' von $[\beta]$, zu dem ein Kreis L durch a und g gehört. Dieses ist der gesuchte 'Schnittpunkt'.

f) Seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, G)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = ([\beta])$ mit dem
Kreis G , der a enthält.

Es existiert der Kreis $K(a,b,c,d)$. Da δ zu β parallel ist, folgt $a_{\delta} = b$ und damit $\beta = \delta$.

2) Der 'Schnittpunkt' der 'Geraden' (α, β) und (γ, δ) sei der Punkt e aus $\mathbb{P}$, das heißt:

die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = (a, e)$ und die

'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, e)$ mit dem Punkt c aus $\mathbb{P}$.

a) Seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, g)$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit den Punkten

h, k aus $\mathbb{P}$.

- i) Die Punkte a, e, c, g, h, k sind paarweise nichtparallel.
- ii) Der Punkt a ist parallel zu c .
- iii) Der Punkt a ist parallel zu h .
- iv) Der Punkt c ist parallel zu h .
- v) Der Punkt g ist parallel zu h .

In den Fällen i), ii) und v) existieren die Kreise $K(a, e, h, k)$ und $K(c, e, h, k)$, also der Kreis $K(a, c, e, h, k)$.

Im Fall i) und v) existiert der Kreis $K(a, g, c, e)$ und somit der Kreis $K(a, g, c, e, h, k)$. Im Fall i) läßt sich das gesuchte Konjugium $\kappa(a, g, h, k)$ definieren; im Fall v) folgt $g = k$, und g ist der gesuchte 'Schnittpunkt'.

Im Fall ii) folgt $a = c$, und die vier 'Punkte' sind kollinear.

Im Fall iii) existiert der Kreis $K(c, e, h, k)$, und wegen β ist k zu e parallel; also ist $k = e$ und $a = h$ und somit $c = a$, und alle vier 'Punkte' sind kollinear.

Im Fall iv) folgt die Parallelität von e und k und damit die von a und h . Also ist c parallel zu h und damit g parallel zu e und k und das Konjugium $\kappa(a, g, h, k)$ läßt sich definieren und ist der gesuchte 'Schnittpunkt'.

- b) Seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, G)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit dem

Kreis G , der a enthält und den Punkten h, k aus $\mathbb{P}$.

Man unterscheidet.

- i) Die Punkte a, e, c, h, k sind paarweise nichtparallel.
- ii) Der Punkt c ist parallel zu h .

In beiden Fällen existiert der Kreis $K(a, e, h, k)$. Im Fall

i) existiert weiter der Kreis $K(c, e, h, k)$ und damit der Kreis $K(a, c, e, h, k)$, der G berührt. Also läßt sich das Konjugium $\kappa(a, k, h)$ definieren und ist der gesuchte 'Schnittpunkt'.

Im Fall ii) ist e parallel zu k und damit $e = k$ und $h = a$, und die vier 'Punkte' liegen kollinear.

c) Nun ist die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, g)$ und die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$ mit dem Punkt h auf dem Kreis K und dem Punkt g aus $\mathbb{P}$.

Man unterscheidet.

i) Die Punkte a, e, c, g, h sind paarweise nichtparallel.

ii) Der Punkt a ist parallel zu c .

In beiden Fällen berühren die Kreise $K(e, a, h)$ und $K(c, e, h)$ den Kreis K in h . Also existiert der Kreis $K(a, e, c, h)$, auf dem im Fall i) noch g liegt, und das Konjugium $\kappa(h, g, a)$ läßt sich definieren und ist der gesuchte 'Schnittpunkt'.

Im Fall ii) folgt $a = c$, und die vier 'Punkte' liegen kollinear.

d) Jetzt seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, G)$ und die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$ mit dem

Kreis G , der a enthält und dem Punkt h auf dem Kreis K . Wieder existiert der Kreis $L := K(a, e, c, h)$, der die Kreise G und K in a und h berührt. Das gesuchte Konjugium $\kappa(a, L, h)$ läßt sich also definieren.

e) Es sei die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, g)$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = ([\beta])$.

Es ist a parallel zu c . Nun folgt $a_{\gamma} \neq a$, da $c_{\gamma} \neq c$ ist, was zum Widerspruch führt.

II) Nun ist die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = (a, b)$ und die

'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, d)$ mit den

Punkten c, d aus $\mathbb{P}$ und dem Kreis B , der a enthält.

Es genügt den Fall zu betrachten, in dem der 'Schnittpunkt' der 'Geraden' das Konjugium ϵ ist. Sonst lägen α, γ, δ kollinear.

a) Seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, g)$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit den

Punkten g, h, k aus $\mathbb{P}$.

Man unterscheidet.

i) Die Punkte a, c, d, g, h, k sind paarweise nichtparallel.

ii) Der Punkt c ist parallel zu h .

In beiden Fällen berührt der Kreis $K(a, h, k)$ den Kreis B .

Im Fall i) existiert der Kreis $K(c, d, h, k)$ und es folgt

$h_{\epsilon} = k$ und damit $\beta = \epsilon = \delta$.

Im Fall ii) ist k parallel zu d , und es folgt wieder $h_{\epsilon} = k$.

b) Seien jetzt die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, G)$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit dem

Kreis G , der a enthält und den Punkten h, k aus $\mathbb{P}$.

Man unterscheidet.

i) Die Punkte a, c, d, h, k sind paarweise nichtparallel.

ii) Der Punkt c ist parallel zu h .

Beide Fälle gehen analog a).

c) Seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, g)$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$ mit dem Punkt

h auf dem Kreis K. Man unterscheidet.

- i) Die Punkte a, c, d, g, h sind paarweise nichtparallel.
- ii) Der Punkt a ist parallel zu h.

In beiden Fällen berührt der Kreis $K(a, c, d)$ den Kreis B in a. Im Fall i) berührt der Kreis $B(a, K, h)$ den Kreis B in a und es folgt $a_{\delta} = a$ und somit $\beta = \delta$.

Im Fall ii) folgt aus der Parallelität $a_{\delta} = a$ und somit $\beta = \delta$.

- d) Seien jetzt die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, G)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$.

Man unterscheidet.

- i) Die Punkte a, c, d, h sind paarweise nichtparallel.
- ii) Der Punkt a ist parallel zu h.

Jeweils berührt der Kreis $K(h, c, d)$ den Kreis K in h.

Im Fall i) berührt der Kreis $B(h, B, a)$ den Kreis K, und es gilt $h_{\epsilon} = h$ und damit $\beta = \epsilon = \delta$.

Im Fall ii) folgt aus der Parallelität von a und h: $h_{\epsilon} = h$.

- e) Seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, g)$ oder (a, G) und
die 'Gerade' $(\beta, \delta) = ([\beta])$.

Der Kreis $K(a, c, d)$ berührt den Kreis B in a. Da β zu δ parallel ist, gilt $c_{\beta} = d$ und damit $\beta = \delta$.

III) Nun ist die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = (a, b)$ und die

'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, D)$ mit dem

Punkt b aus IP und dem Punkt c auf dem Kreis D.

Wie oben muß man nur den Fall betrachten, daß sich die beiden 'Geraden' im Konjugium ϵ schneiden.

a) Seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, g)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit den
Punkten g, h, k aus $\mathbb{P}$. Man unterscheidet.

- i) Die Punkte a, b, c, g, h, k sind paarweise nichtparallel.
- ii) Der Punkt a ist parallel zu h .
- iii) Der Punkt b ist parallel zu g .
- iv) Der Punkt g ist parallel zu k .

In den Fällen i), iii) und iv) existiert der Kreis $K(a, b, h, k)$. Da der Kreis $K(c, h, k)$ den Kreis D in c berührt, folgt $h_{\epsilon} = k$ und damit $\beta = \epsilon = \delta$.

Im Fall ii) ist b parallel zu k , und deshalb ist $h_{\epsilon} = k$.

b) Seien jetzt die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, G)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit dem
Kreis G , der a enthält. Man unterscheidet.

- i) Die Punkte a, b, c, h, k sind paarweise nichtparallel.
- ii) Der Punkt a ist parallel zu h .

Beide Fälle gehen wie in a).

c) Seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, g)$ oder (a, G) und
die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$ mit dem
Punkt h auf dem Kreis K .

Die Kreise $K(a, b, h)$ und $B(h, D, c)$ berühren K in h . Also folgt $h_{\epsilon} = h$ und damit $\beta = \epsilon = \delta$.

d) Seien weiter die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, g)$ oder (a, G)
und die 'Gerade' $(\beta, \delta) = ([\beta])$.

Der Kreis $K(a, b, c)$ berührt den Kreis D in c . Da δ zu β parallel ist, folgt $a_{\delta} = b$ und damit $\beta = \delta$.

IV) Nun ist die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = (a, B)$ und die
 'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, D)$ mit dem
 Punkt c auf dem Kreis D und dem Kreis B , der a enthält.
 Wieder ist der 'Schnittpunkt' der beiden 'Geraden' das
 Konjugium ϵ .

a) Seien jetzt die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, g)$ oder (a, G)
 und die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit den
 Punkten g, h, k aus IP . Man unterscheidet.

- i) Die Punkte a, c, g, h, k sind paarweise nichtparallel.
- ii) Der Punkt g ist parallel zu k .

Jeweils berührt der Kreis $K(a, h, k)$ den Kreis B in a und
 der Kreis $K(c, h, k)$ berührt D in c . Also folgt $h_{\epsilon} = k$ und
 damit $\beta = \epsilon = \delta$.

b) Seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, g)$ und die
 'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$ mit dem
 Punkt h auf dem Kreis K . Man unterscheidet.

- i) Die Punkte a, c, h, g sind paarweise nichtparallel.
- ii) Der Punkt a ist parallel zu h .
- iii) Der Punkt c ist parallel zu h .
- iv) Die Punkte a, c, h sind paarweise parallel.

Im Fall i) berühren die Kreise $B(h, B, a)$ und $B(h, D, c)$ den
 Kreis K in h . Also folgt $h_{\epsilon} = h$ und damit $\beta = \epsilon = \delta$.

In den Fällen ii), iii) und iv) folgt aus der Paralleli-
 tät die Gleichheit von h_{ϵ} und h .

c) Jetzt seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, G)$ und die
 'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$.

In allen Fällen folgt wie oben $h_{\epsilon} = h$ und damit $\beta = \epsilon = \delta$.

- d) Nun seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, g)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = ([\beta])$.

Dann berührt der Kreis $B(c, B, a)$ den Kreis D in c und gehört zu β und δ . Es folgt $\beta = \delta$.

- e) Seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, G)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = ([\beta])$.

Man unterscheidet.

- i) Der Punkt a ist nichtparallel zu c .
ii) Der Punkt a ist parallel zu c .

Der Fall i) geht analog d).

Im Fall ii) ist das Konjugium β' aus $[\beta]$, zu dem G gehört, der gesuchte 'Schnittpunkt'.

- V) Nun seien die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = (a, b)$ und die
'Gerade' $(\gamma, \delta) = ([\gamma])$ mit dem
Punkt b aus IP . Dann ist der 'Schnittpunkt' der beiden
'Geraden' ein Konjugium ϵ , das zu $[\gamma]$ gehört.

- a) Seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, g)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit den

Punkten g, h, k aus IP . Man unterscheidet.

- i) Die Punkte a, b, h, k sind paarweise nichtparallel.
ii) Der Punkt a ist parallel zu h .

Im Fall i) existiert der Kreis $K(a, b, h, k)$; da ϵ zu $[\gamma]$ gehört, folgt $h_\epsilon = k$, und es ist $\beta = \epsilon = \delta$.

Im Fall ii) ist, da γ und δ parallel sind, g zu k parallel, und das Konjugium $\kappa(a, g, h, k)$ läßt sich definieren.

- b) Seien jetzt die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, G)$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit dem Kreis G , der a enthält.
Der Fall geht analog a)i).

c) Nun ist die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, g)$ oder (a, G) und
die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$.

Da ϵ zu $[\delta]$ gehört, gilt $h_{\epsilon} = h$ und damit $\epsilon = \beta$ und die
'Punkte' β, γ, δ liegen kollinear.

d) Ist die 'Gerade' $(\beta, \delta) = ([\beta])$, so liegen die 'Punkte'
 β, γ, δ kollinear.

VI) Nun ist die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = (a, B)$ und die
'Gerade' $(\gamma, \delta) = ([\gamma])$ mit dem
Kreis B , der a enthält. Der 'Schnittpunkt' der beiden
'Geraden' ist das Konjugium ϵ , das zu $[\gamma]$ gehört und a
und B festläßt.

a) Jetzt seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, g)$ oder (a, G)
und die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit den
Punkten g, h, k aus $\mathbb{P}$. Der Kreis $K(a, h, k)$ berührt den
Kreis B in a . Da ϵ zu $[\delta]$ gehört, folgt $h_{\epsilon} = k$ und damit
 $\epsilon = \beta$, und die 'Punkte' β, γ, δ liegen kollinear.

b) Nun ist die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, g)$ oder (a, G) und
'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$ mit dem
Punkt h auf dem Kreis K . Da ϵ zu $[\delta]$ gehört, folgt $h_{\epsilon} = h$
und damit $\epsilon = \beta$.

c) Ist die 'Gerade' $(\beta, \delta) = ([\beta])$, so liegen wieder die
'Punkte' β, γ und δ kollinear.

Fall B : Der 'Punkt' α ist der Punkt a und der 'Punkt' β ist der Punkt b aus $\mathbb{P}$.

I) Es seien die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = (a, b)$ und die 'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, d)$ mit den Punkten c, d aus $\mathbb{P}$. Der 'Schnittpunkt' der beiden 'Geraden' ist das Konjugium ϵ , das heißt, es gilt $a_\epsilon = b, c_\epsilon = d$.

a) Seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, g)$ und die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (b, k)$ mit den Punkten g, k aus $\mathbb{P}$. Man unterscheidet.

- i) Die Punkte a, b, c, d, g, k sind paarweise nichtparallel.
- ii) Der Punkt a ist parallel zu c .
- iii) Der Punkt a ist parallel zu k .
- iv) Der Punkt b ist parallel zu g .
- v) Der Punkt c ist parallel zu g .
- vi) Der Punkt c ist parallel zu k .
- vii) Der Punkt g ist parallel zu k .

In den Fällen i), iii), iv), v) und vii) existieren die Kreise $K(a, b, c, d)$ und $K(b, k, c, d)$. Also existiert der Kreis $K(a, b, c, d, k)$.

Im Fall i), iv) und vii) existiert weiter der Kreis $K(a, g, c, d)$ und somit der Kreis $K(a, b, c, d, g, k)$. Im Fall i) läßt sich das Konjugium $\kappa(a, b, g, k)$ definieren.

Im Fall iv) folgt $b = g$ und die 'Punkte' α, β, γ sind kollinear.

Im Fall vii) folgt $g = k$, und k ist der gesuchte 'Schnittpunkt'.

Im Fall iii) folgt $a = k$, und die 'Punkte' α, β, δ sind

kollinear.

Im Fall v) ist wegen γ a zu d parallel und damit wegen ϵ b zu c. Wegen δ ist dann d zu k parallel, und das gesuchte Konjugium läßt sich definieren.

Im Fall ii) ist b zu d parallel wegen ϵ und damit k zu c und a wegen δ ; also ist g zu d und damit zu b parallel, und das Konjugium $\kappa(a, g, b, k)$ läßt sich definieren.

Im Fall vi) ist d zu b parallel wegen δ . Also ist wegen ϵ a zu c parallel und wegen γ d zu g, und das gesuchte Konjugium läßt sich definieren.

b) Seien jetzt die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, G)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (b, k)$ mit dem
Kreis G, der a enthält.

Dann existiert wie in a)i) der Kreis $K(a, b, c, d, k)$, der wegen γ den Kreis G berührt. Damit existiert das Konjugium $\kappa(a, k, b)$ und ist der gesuchte 'Schnittpunkt'.

c) Seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, G)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (b, K)$ mit dem
Kreis K, der b enthält.

Dann existiert der Kreis $L := K(a, b, c, d)$, der G und K berührt. Also ist der gesuchte 'Schnittpunkt' das Konjugium $\kappa(a, L, b)$.

II) Es sei die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = (a, b)$ und die
'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, D)$ mit dem
Punkt c auf dem Kreis D. Der 'Schnittpunkt' der beiden
'Geraden' ist das Konjugium ϵ .

a) Jetzt seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, g)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (b, k)$ mit den
Punkten b, k aus $\mathbb{P}$. Man unterscheidet.

- i) Die Punkte a, b, c, g, k sind paarweise nichtparallel.
- ii) Der Punkt a ist parallel zu k .
- iii) Der Punkt b ist parallel zu g .
- iv) Der Punkt g ist parallel zu k .

In allen Fällen berühren die Kreise $K(a, b, c)$, $K(b, k, c)$ und $K(a, g, c)$ den Kreis D im Punkt c . Also existiert der Kreis $K(a, b, c, g, k)$.

Im Fall i) läßt sich das Konjugium $\kappa(a, g, b, k)$ definieren.
Im Fall ii) folgt $a = k$, und die 'Punkte' α, β, δ sind kollinear.

Im Fall iii) folgt $b = g$, und die 'Punkte' α, β, γ sind kollinear.

Im Fall iv) ist $g = k$, und g ist somit der gesuchte 'Schnittpunkt'.

b) Nun seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, G)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (b, k)$ mit dem
Kreis G , der a enthält.

Die Kreise $K(a, b, c)$, $K(b, k, c)$ und $B(c, G, a)$ berühren den Kreis D im Punkte c und sind damit gleich. Also berührt der Kreis $K(a, b, k)$ den Kreis G im Punkt a , und das Konjugium $\kappa(a, b, k)$ ist der gesuchte 'Schnittpunkt'.

c) Jetzt seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, G)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (b, K)$.

Der Kreis $L := K(a, b, c)$ berührt die Kreise G und K in

a und b. Das Konjugium $\kappa(a, L, b)$ ist also der gesuchte 'Schnittpunkt'.

III) Jetzt seien die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = ([a]) = ([b])$ und die 'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, d)$ mit den parallelen Punkten a, b und den Punkten c, d aus IP. Der 'Schnittpunkt' der beiden 'Geraden' ist der Punkt c, der also parallel zu a ist.

Nun seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, g)$ und die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (b, k)$ mit den Punkten g, k aus IP. Es sind stets g und k zu d parallel. Also läßt sich das gesuchte Konjugium $\kappa(a, g, b, k)$ definieren. Alle anderen Fälle können nicht auftreten.

IV) Nun seien die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = ([a]) = ([b])$ und die 'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, D)$ mit den parallelen Punkten a, b und dem Punkt c auf dem Kreis D. Der 'Schnittpunkt' der beiden 'Geraden' ist der Punkt c, der parallel zu a ist. Es kann nur der Fall auftreten, daß die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, G)$ und die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (b, K)$ mit den Kreisen G bzw. K, welche die Punkte a bzw. b enthalten. Der gesuchte 'Schnittpunkt' ist das Konjugium $\kappa(a, G, b, K)$.

V) Nun seien die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = ([a]) = ([b])$ und die 'Gerade' $(\gamma, \delta) = ([\gamma])$.

Dann ist der 'Schnittpunkt' der beiden 'Geraden' der 'Punkt' l_{∞} . Es treten folgende zwei Fälle auf:

a) Es ist die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, g)$ und die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (b, k)$ mit den Punkten

g, k aus $\mathbb{P}$. Da γ zu δ parallel ist, sind g und k parallel. Das Konjugium $\kappa(a, g, b, k)$ ist der gesuchte 'Schnittpunkt'.

b) Es ist die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, G)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (b, K)$ mit den Kreisen
 G bzw. K , welche die Punkte a bzw. b enthalten. Der gesuchte 'Schnittpunkt' ist das Konjugium $\kappa(a, G, b, K)$.

Fall C : Der 'Punkt' α ist der Punkt a und der 'Punkt' γ ist der Punkt c aus $\mathbb{P}$.

I) Es seien die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = (a, b)$ und die
'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, d)$ mit den
Punkten b und d aus $\mathbb{P}$.

1) Der 'Schnittpunkt' der beiden 'Geraden' ist das Konjugium ϵ , das heißt, es gilt $a_\epsilon = k$, $c_\epsilon = d$.

a) Seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, c)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit den
Punkten h, k aus $\mathbb{P}$. Man unterscheidet.

- i) Die Punkte a, b, c, d, h, k sind paarweise nichtparallel.
- ii) Der Punkt a ist parallel zu h .
- iii) Der Punkt b ist parallel zu c .

Im Fall i) existieren die Kreise $K(a, b, c, d)$, $K(a, b, h, k)$ und $K(c, d, h, k)$. Also folgt $h_\epsilon = k$ und damit $\beta = \epsilon = \delta$.

Im Fall ii) ist b zu k parallel, und es existiert der Kreis $K(c, d, h, k)$. Also folgt $h_\epsilon = k$.

Im Fall iii) folgt wie in i) $h_\epsilon = k$.

b) Seien jetzt die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, c)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$ mit dem

Punkt h auf dem Kreis K . Die Kreise $K(a,b,h)$ und $K(c,d,h)$ berühren den Kreis K in h . Es folgt $h_{\epsilon} = h$ und somit $\beta = \epsilon = \delta$.

c) Nun seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, c)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = ([\beta])$.

Man unterscheidet.

i) Die Punkte a, b, c, d sind paarweise nichtparallel.

ii) Der Punkt a ist parallel zu d .

Im Fall i) existiert der Kreis $K(a, b, c, d)$, der zu β und δ gehört. Da β zu δ parallel ist, folgt $\beta = \delta$.

Im Fall ii) ist das Konjugium β' aus $[\beta]$, zu dem ein Kreis durch a, c gehört, der gesuchte 'Schnittpunkt'.

d) Nun ist die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = ([a]) = ([c])$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit den Punkten
 h, k aus $\mathbb{P}$. Man unterscheidet.

i) Die Punkte a, b, h, k sind paarweise nichtparallel.

ii) Der Punkt a ist parallel zu h .

Im Fall i) existieren die Kreise $K(a, b, h, k)$ und $K(c, d, h, k)$, und es folgt $h_{\epsilon} = k$ und damit $\beta = \epsilon = \delta$.

Im Fall ii) ist h der gesuchte 'Schnittpunkt'.

e) Nun ist die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = ([a]) = ([c])$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$ mit dem

Punkt h auf dem Kreis K . Die Kreise $K(a, b, h)$ und $K(c, d, h)$ berühren den Kreis K in h . Also folgt $h_{\epsilon} = h$ und daraus
 $\beta = \epsilon = \delta$.

f) Die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = ([a]) = ([c])$ und die 'Gerade'
 $(\beta, \delta) = ([\beta])$ schneiden sich im 'Punkt' l_{∞} .

2) Der 'Schnittpunkt' der beiden 'Geraden' ist der Punkt e aus IP , das heißt,

es sind die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = (a, e)$ und die

'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, e)$.

a) Seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, c)$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit den

Punkten h, k aus IP . Dann existieren die Kreise $K(a, e, h, k)$

und $K(c, e, h, k)$ und somit der Kreis $K(a, e, c, h, k)$. Also

läßt sich das Konjugium $\kappa(a, c, h, k)$ definieren.

b) Seien jetzt die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, c)$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$ mit dem

Punkt h auf dem Kreis K . Der Kreis $K(a, e, c, h)$ berührt

dann den Kreis K in h . Also ist das Konjugium $\kappa(h, a, c)$

der gesuchte 'Schnittpunkt'.

c) Seien jetzt die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = ([a]) = ([c])$ und

die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$.

Man unterscheidet.

i) Die Punkte a, e, c, h, k sind paarweise nichtparallel.

ii) Der Punkt a ist parallel zu h .

Im Fall existieren die Kreise $K(a, e, h, k)$, $K(c, e, h, k)$

und somit der Kreis $K(a, e, c, h, k)$. Also folgt $\alpha = a = c =$

γ .

Im Fall ii) ist h der gesuchte 'Schnittpunkt'.

d) Seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = ([a]) = ([c])$ und

die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$ mit dem

Punkt h auf dem Kreis K . Die Kreise $K(a, e, h)$, $K(c, e, h)$

berühren den Kreis K in h und sind somit gleich. Also

folgt $a = c$ und damit $\alpha = \gamma$.

e) Die 'Geraden' $(\alpha, \gamma) = ([a]) = ([c])$ und $(\beta, \delta) = ([\beta])$ schneiden sich im 'Punkt' $l_{\alpha\delta}$.

II) Es seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = (a, B)$ und die
'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, d)$ mit dem

Kreis B, der a enthält, und dem Punkt d aus IP. Der
'Schnittpunkt' der beiden 'Geraden' ist das Konjugium
 ϵ , das heißt, es gilt $a_{\epsilon} = a$, $B_{\epsilon} = B$, $c_{\epsilon} = d$.

a) Es seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, c)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit den

Punkten h, k aus IP. Man unterscheidet.

- i) Die Punkte a, c, d, h, k sind paarweise nichtparallel.
- ii) Der Punkt c ist parallel zu h.

In beiden Fällen berührt der Kreis $K(a, h, k)$ den Kreis
B in a. Im Fall i) existiert der Kreis $K(c, d, h, k)$ und
daraus folgt $h_{\epsilon} = k$. Im Fall ii) ist k zu d parallel,
und daraus ergibt sich $h_{\epsilon} = k$, und es folgt $\beta = \epsilon = \delta$.

b) Nun seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, c)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$ mit dem

Punkt h auf dem Kreis K. Man unterscheidet.

- i) Die Punkte a, c, d, h sind paarweise nichtparallel.
- ii) Der Punkt a ist parallel zu h.

In beiden Fällen gilt $h_{\epsilon} = k$, und es folgt $\beta = \epsilon = \delta$.

III) Nun seien die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = (a, B)$ und die

'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, D)$ mit dem

Kreis B, der a enthält, und dem Kreis D, der c enthält.

Wieder ist der 'Schnittpunkt' der beiden 'Geraden' das Konjugium ϵ .

a) Es seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, c)$ und die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit den Punkten h, k aus $\mathbb{P}$. Die Kreise $K(a, h, k)$ bzw. $K(c, h, k)$ berühren dann die Kreise B bzw. D . Also folgt wieder $h_{\epsilon} = k$ und damit $\beta = \epsilon = \delta$.

b) Nun seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, c)$ und die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$ mit dem Punkt h auf dem Kreis K . Man unterscheidet.

i) Die Punkte a, c, h sind paarweise nichtparallel.

ii) Der Punkt a ist parallel zu h .

Der Kreis $B(h, D, c)$ berührt den Kreis K . Im Fall i) berührt der Kreis $B(h, B, a)$ den Kreis K . In beiden Fällen folgt also $h_{\epsilon} = h$ und damit $\beta = \epsilon = \delta$.

c) Es seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = ([a]) = ([c])$ und die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ bzw. (h, K) . Wie in Fall a) bzw. b) folgt $h_{\epsilon} = k$.

d) Die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = ([a]) = ([c])$ und die 'Gerade' $(\beta, \delta) = ([\beta])$ schneiden sich im 'Punkt' l_{∞} .

Fall D : Der 'Punkt' α ist der Punkt a und der 'Punkt' δ der Punkt d aus $\mathbb{P}$.

I) Es seien die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = (a, b)$ und die 'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, d)$ mit den

Punkten b, c aus $\mathbb{P}$.

1) Der 'Schnittpunkt' der beiden 'Geraden' ist das

Konjugium ϵ , das heißt, es gilt $a_\epsilon = b$, $c_\epsilon = d$.

a) Nun seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, g)$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, d)$ mit den

Punkten g, h aus IP . Man unterscheidet.

i) Die Punkte a, b, c, d, g, h sind paarweise nichtparallel.

ii) Der Punkt a ist parallel zu c .

iii) Der Punkt a ist parallel zu d .

iv) Der Punkt a ist parallel zu h .

v) Der Punkt b ist parallel zu g .

vi) Der Punkt c ist parallel zu h .

vii) Der Punkt g ist parallel zu h .

In den Fällen i), v), vi) und vii) existieren die Kreise $K(a, b, c, d)$, $K(a, b, h, d)$ und $K(c, d, a, g)$. Also existiert der Kreis $K(a, b, c, d, h, g)$ und man ist fertig.

Im Fall ii) ist b zu d parallel und damit a zu h . Weiter ist g zu d parallel, und das Konjugium $\kappa(a, g, h, d)$ läßt sich definieren.

Im Fall iii) ist b zu c und h parallel, und c ist zu g parallel. Also ist g zu h parallel und das gesuchte Konjugium läßt sich definieren.

Im Fall iv) ist b zu d parallel und damit a zu c . Also ist g zu d parallel, und das gesuchte Konjugium läßt sich definieren.

b) Nun seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, G)$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, d)$ mit dem

Kreis G , der a enthält, und dem Punkt h aus IP . Man unterscheidet.

- i) Die Punkte a, b, c, d, h sind paarweise nichtparallel.
- ii) Der Punkt a ist parallel zu h .
- iii) Der Punkt c ist parallel zu h .

In den Fällen i) und iii) existieren die Kreise $K(a, b, c, d)$ und $K(a, b, h, d)$ und damit der Kreis $K(a, b, c, d, h)$, der den Kreis G berührt. Im Fall i) existiert das gesuchte Konjugium; im Fall iii) folgt $c = h$, und β, γ, δ liegen kollinear.

Im Fall ii) ist b zu d parallel und damit a zu c , was zum Widerspruch führt.

c) Es seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, G)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (d, H)$ mit dem
Kreis H , der d enthält. Der Kreis $L := K(a, b, c, d)$ berührt dann die Kreise G bzw. H in a bzw. d . Das Konjugium $\kappa(a, L, d)$ ist also der gesuchte 'Schnittpunkt'.

2) Es sei der 'Schnittpunkt' der beiden 'Geraden' der Punkt e aus IP , das heißt, es
es sind die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = (a, e)$ und die
'Gerade' $(\gamma, \delta) = (e, d)$ mit dem
Punkt d aus IP .

a) Nun seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, g)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, d)$ mit den
Punkten g, h aus IP . Man unterscheidet.

- i) Die Punkte a, e, d, g, h sind paarweise nichtparallel.
- ii) Der Punkt a ist parallel zu d .
- iii) Der Punkt e ist parallel zu g .
- iv) Der Punkt g ist parallel zu h .

In den Fällen i) und iv) existieren die Kreise $K(a, e, h, d)$, $K(a, g, e, d)$ und somit der Kreis $K(a, e, d, g, h)$, und man ist fertig.

Im Fall ii) ist e zu g und h parallel, und man kann das Konjugium $\kappa(a, g, h, d)$ definieren.

Im Fall iii) ist a zu d parallel wie in ii).

b) Nun ist die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, G)$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, d)$ mit dem

Kreis G , der a enthält. Der Kreis $K(a, e, h, d)$ berührt dann den Kreis G in a , und das Konjugium $\kappa(a, h, d)$ ist der gesuchte 'Schnittpunkt'.

c) Nun ist die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, G)$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (d, H)$ mit dem

Kreis H , der d enthält. Der Kreis $L := K(a, e, d)$ berührt dann die Kreise G bzw. H in a bzw. d , und das Konjugium $\kappa(a, L, d)$ ist der gesuchte 'Schnittpunkt'.

II) Es seien die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = (a, B)$ und die

'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, d)$ mit dem

Kreis B , der a enthält. Der 'Schnittpunkt' der beiden 'Geraden' ist das Konjugium ϵ .

a) Nun seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, g)$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, d)$ mit den

Punkten g, h aus $\mathbb{P}$. Man unterscheidet.

i) Die Punkte a, c, d, g, h sind paarweise nichtparallel.

ii) Der Punkt c ist parallel zu h .

iii) Der Punkt g ist parallel zu h .

Die Kreise $K(a,h,d)$ und $K(a,g,c,d)$ berühren den Kreis B in a . Also existiert der Kreis $K(a,c,d,g,h)$ und man ist fertig.

b) Nun ist die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, G)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, d)$ oder (d, H) mit
dem Kreis G , der a enthält, und dem Kreis H , der d ent-
hält. Man unterscheidet.

i) Die Punkte a, c, d, h sind paarweise nichtparallel.

ii) Der Punkt c ist parallel zu h .

Der Kreis $K(a, c, d)$ berührt jeweils die Kreise B und G
in a . Also liegen die 'Punkte' α, β, γ kollinear.

c) Nun ist die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, g)$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (d, H)$.

Dann berührt der Kreis $K(a, g, c, d)$ den Kreis H in d , und
das Konjugium $\kappa(d, a, g)$ ist der gesuchte 'Schnittpunkt'.

III) Es seien die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = (a, B)$ und die

'Gerade' $(\gamma, \delta) = (d, C)$ mit dem
Kreis B , der a enthält, und dem Kreis C , der d enthält.

a) Es seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, g)$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, d)$ mit den
Punkten g, h aus $\mathbb{P}$. Man unterscheidet.

i) Die Punkte a, d, g, h sind paarweise nichtparallel.

ii) Der Punkt g ist parallel zu h .

Der Kreis $B(a, C, d)$ berührt auch den Kreis B . Da die
Kreise $K(a, h, d)$ bzw. $K(a, g, d)$ die Kreise B bzw. C in a
bzw. d berühren, sind sie gleich. Also existiert der
Kreis $K(a, g, h, d)$, und man ist fertig.

b) Es seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, g)$ und die
'Gerade' $(\beta, \epsilon) = (h, d)$ oder (d, h) .

Der Kreis $B(a, c, d)$ berührt die Kreise B und G in a. Also
liegen die 'Punkte' α, β, γ kollinear. Ist im zweiten Fall
a parallel zu d, so ist der gesuchte 'Schnittpunkt' das
Konjugium $\kappa(a, g, d, h)$.

Fall B : Der 'Punkt' α ist der Punkt a, der 'Punkt' β
ist der Punkt b und der 'Punkt' γ ist der Punkt c aus
F. Der 'Schnittpunkt' der 'Geraden' (α, β) und (γ, δ)
ist entweder das Konjugium ϵ oder l_{∞} .

I) Es seien die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = (a, b)$ und die
'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, d)$ mit dem
Punkt d aus F.

a) Nun seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, c)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (b, k)$ mit dem
Punkt k aus F. Man unterscheidet.

- i) Die Punkte a, b, c, d, k sind paarweise nichtparallel.
- ii) Der Punkt a ist parallel zu d.
- iii) Der Punkt a ist parallel zu k.

In den Fällen i) und iii) existieren die Kreise $B(a, b, c, d)$ wegen ϵ und $K(c, d, b, k)$ wegen δ und somit der Kreis
 $K(a, b, c, d, k)$; dann ist man fertig.

Im Fall ii) ist b zu c und damit k zu d parallel. Dann
läßt sich das gesuchte Konjugium $\kappa(a, c, b, k)$ definieren.

b) Es seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, c)$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (b, k)$ mit dem

Kreis K , der b enthält. Der Kreis $K(a,b,c,d)$ berührt dann den Kreis K , und das Konjugium $\kappa(b,a,c)$ ist der gesuchte 'Schnittpunkt'.

c) Es seien nun die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = ([a]) = ([c])$ und die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (b, k)$ mit dem Punkt k aus $\mathbb{P}$. Es ist der Punkt b zu d parallel und deshalb der Punkt c zu k , und damit ist a zu k parallel. Also ist k der gesuchte 'Schnittpunkt'.

II) Es seien die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = (a, b)$ und die 'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, d)$ mit dem Kreis D , der c enthält.

a) Nun seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, c)$ und die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (b, k)$ mit dem Punkt k aus $\mathbb{P}$. Man unterscheidet.

- i) Die Punkte a, b, c, k sind paarweise nichtparallel.
- ii) Der Punkt a ist parallel zu k .

In beiden Fällen berühren die Kreise $K(a,b,c)$ und $K(b,k,c)$ den Kreis D in c . Also existiert der Kreis $K(a,c,b,k)$, und man ist fertig.

b) Nun ist die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, c)$ und die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (b, k)$ mit dem Kreis K , der b enthält. Der Kreis $K(a,b,c)$ berührt dann den Kreis D in c , und das Konjugium $\kappa(b,a,c)$ ist der gesuchte 'Schnittpunkt'.

III) Es sei die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = ([a]) = ([b])$ und die 'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, d)$, wobei der

Punkt d aus $\mathbb{P}$ parallel zu a ist, das heißt, d ist der 'Schnittpunkt' der beiden 'Geraden'.

Es sei die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, c)$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (b, k)$ mit dem

Punkt k aus $\mathbb{P}$. Dann ist c parallel zu k , und das gesuchte Konjugium $\kappa(a, c, b, k)$ läßt sich definieren.

Fall F : Der 'Punkt' α ist der Punkt a , der 'Punkt' β ist der Punkt b , der 'Punkt' γ der Punkt c und der 'Punkt' δ ist der 'Punkt' d aus $\mathbb{P}$.

I) Es seien die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = (a, b)$ und die

'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, d)$.

Der 'Schnittpunkt' der beiden 'Geraden' ist das Konjugium ϵ .

a) Es seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, c)$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (b, d)$.

Man unterscheidet.

i) Die Punkte a, b, c, d sind paarweise nichtparallel.

ii) Der Punkt a ist parallel zu d .

Im Fall i) existiert der Kreis $K(a, b, c, d)$, und im Fall

ii) ist b zu c parallel. Also läßt sich das gesuchte Konjugium jeweils definieren.

b) Ist die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = ([a]) = ([c])$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = ([b]) = ([d])$, so ist der 'Schnittpunkt' der beiden 'Geraden' l_{α} .

II) Nun sei die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = ([\dot{a}]) = ([b])$ und

die 'Gerade' $(\gamma, \delta) = ([c]) = ([d])$.

Der 'Schnittpunkt' der beiden 'Geraden' ist der 'Punkt' l_{∞} .

Ist die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = (a, c)$ und die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (b, d)$, so ist der gesuchte 'Schnittpunkt' das Konjugium $\kappa(a, c, b, d)$.

Fall G : Der 'Punkt' α ist der 'Punkt' l_{∞} .

I) Der 'Punkt' β sei das Konjugium β . Dann ist die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = ([\beta])$.

1) Weiter seien die 'Punkte' γ, δ Konjugien und die 'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, d)$ mit den Punkten c, d aus $\mathbb{P}$. Der 'Schnittpunkt' der beiden 'Geraden' ist das Konjugium ϵ aus $[\beta]$.

a) Es seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = ([\gamma])$ und die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit den Punkten h, k aus $\mathbb{P}$. Man unterscheidet.

- i) Die Punkte c, d, h, k sind paarweise nichtparallel.
- ii) Der Punkt c ist parallel zu h .

Im Fall i) existiert der Kreis $K(c, d, h, k)$, der zu β und ϵ gehört. Dann ist $\beta = \epsilon = c$.

Im Fall ii) ist d zu k parallel, und das Konjugium aus $[\gamma]$, zu dem ein Kreis L durch h und k gehört, ist der gesuchte 'Schnittpunkt'.

b) Es seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = ([\gamma])$ und die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$ mit dem

Punkt h auf dem Kreis K . Der Kreis $K(c, d, h)$ berührt dann den Kreis K und gehört zu β und ϵ . Also folgt $\beta = \epsilon = \delta$.

2) Wieder seien die 'Punkte' γ, δ Konjugien, aber es sei die 'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, D)$ mit dem Punkt c auf dem Kreis D .

a) Es seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = ([\gamma])$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit den
Punkten h, k aus IP . Der Kreis $K(c, h, k)$ berührt dann den
Kreis D in c . Also folgt wie oben $\beta = \epsilon = \delta$.

b) Es seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = ([\gamma])$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$ mit dem
Punkt h auf dem Kreis K . Man unterscheidet.

- i) Die Punkte c und h sind nichtparallel.
- ii) Der Punkt c ist parallel zu h .

Im Fall i) berührt der Kreis $B(c, K, h)$ den Kreis D in c ,
gehört also zu β und ϵ . Also folgt $\beta = \epsilon = \delta$.

Im Fall ii) ist das Konjugium γ' aus $[\gamma]$, zu dem der
Kreis K gehört, der gesuchte 'Schnittpunkt'.

3) Seien der 'Punkt' γ der Punkt c aus IP und δ ein
Konjugium und die 'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, d)$ mit dem Punkt
 $d = c_\delta$ aus IP .

a) Es ist die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = ([c])$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit den
Punkten h, k aus IP . Man unterscheidet.

- i) Die Punkte c, d, h, k sind paarweise nichtparallel.
- ii) Der Punkt c ist parallel zu h .

Im Fall i) existiert der Kreis $K(c, d, h, k)$, der zu β und
 ϵ gehört. Da ϵ zu β parallel ist, folgt $\beta = \epsilon = \delta$.

Im Fall ii) ist h der gesuchte 'Schnittpunkt'.

b) Es seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = ([c])$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$ mit dem
Punkt h auf dem Kreis K . Der Beweis geht analog 1b).

4) Wieder ist γ der Punkt c aus $\mathbb{P}$ und δ ein Konjugium,
aber es ist die 'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, D)$ mit dem Kreis D ,
der c enthält.

a) Es seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = ([c])$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, k)$ mit den
Punkten h, k aus $\mathbb{P}$. Der Beweis geht analog 2a).

b) Es seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = ([c])$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, K)$ mit dem
Punkt h auf dem Kreis K . Man unterscheidet.

i) Die Punkte c und h sind nichtparallel.

ii) Der Punkt c ist parallel zu h .

Der Fall i) geht analog 2bi). Im Fall ii) ist h der ge-
suchte 'Schnittpunkt'.

5) Nun seien γ der Punkt c und δ der Punkt d aus $\mathbb{P}$.

Es ist die 'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, d)$.

Es seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = ([c])$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, d)$ mit dem

Punkt h aus $\mathbb{P}$. Man unterscheidet.

i) Die Punkte c, d, h sind paarweise nichtparallel.

ii) Der Punkt c ist parallel zu h .

Im Fall i) existiert der Kreis $K(h, c, d)$, der zu β und
 ϵ gehört. Also folgt $\beta = \epsilon = \delta$.

Im Fall ii) ist h der gesuchte 'Schnittpunkt'.

6) Seien nun γ ein Konjugium und δ ein Punkt d aus IP .
Weiter sei die 'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, d)$ mit dem Punkt $c = d_\gamma$.

a) Es ist die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = ([\gamma])$, und es sei
die 'Gerade' $(\beta, \delta) = (h, d)$ mit dem Punkt
 $h = d_\beta$. Man unterscheidet.

i) Die Punkte c, d, h sind paarweise nichtparallel.

ii) Der Punkt c ist parallel zu h .

Der Fall i) geht analog 5i).

Im Fall ii) ist das Konjugium γ' aus $[\gamma]$, zu dem ein
Kreis durch h und d gehört, der gesuchte 'Schnittpunkt'.

7) Sei wieder γ ein Konjugium und δ ein Punkt d aus IP .
Nun sei die 'Gerade' $(\gamma, \delta) = (d, C)$ mit dem Kreis C , der
 d enthält.

Es seien weiter die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = ([\gamma])$ und die
'Gerade' $(\beta, \delta) = (d, H)$ mit dem
Kreis H , der d enthält. Das Konjugium γ' aus $[\gamma]$, zu
dem H gehört, ist der gesuchte 'Schnittpunkt'.

II) Der 'Punkt' β sei nun der Punkt b aus IP . Dann ist
die 'Gerade' $(\alpha, \beta) = ([b])$, und der 'Schnittpunkt' von
 (α, β) und (γ, δ) ist ein Punkt e aus IP , der parallel
zu b ist.

1) Weiter seien die 'Punkte' γ, δ Konjugien und die
'Gerade' $(\gamma, \delta) = (c, e)$ mit dem Punkt c aus IP .

Es seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = ([\gamma])$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (b, k)$ mit dem

Punkt k aus IP . Dann ist c zu k parallel, und das Kon-

jugium γ' aus $[\gamma]$, zu dem ein Kreis durch b, k gehört, ist der gesuchte 'Schnittpunkt'.

2) Nun seien die 'Punkte' γ, δ Konjugien und die 'Gerade' $(\gamma, \delta) = (e, C)$ mit dem Kreis C , der e enthält.

Dann sind die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = ([\gamma])$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (b, K)$ mit dem

Kreis K , der b enthält. Das Konjugium γ' aus $[\gamma]$, zu dem K gehört, ist dann der gesuchte 'Schnittpunkt'.

3) Nun sei der 'Punkt' γ der Punkt c aus $\mathbb{P}$, und der

'Punkt' δ sei ein Konjugium. Dann ist die 'Gerade'

$(\gamma, \delta) = (c, e)$.

Es seien die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = ([c])$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (b, k)$ mit dem

Punkt $k = b_\delta$. Dann ist c parallel zu k , und damit ist k der gesuchte 'Schnittpunkt'.

4) Nun sei der 'Punkt' γ ein Konjugium, und δ sei der

Punkt d aus $\mathbb{P}$. Dann ist die 'Gerade' $(\gamma, \delta) = (e, d)$.

Weiter sind die 'Gerade' $(\alpha, \gamma) = ([\gamma])$ und die

'Gerade' $(\beta, \delta) = (b, d)$.

Wieder existiert ein Konjugium γ' aus $[\gamma]$, das b auf d abbildet. γ' ist der gesuchte 'Schnittpunkt'.

Kapitel IV : Ergebnisse und Anwendungen

Im ersten Abschnitt wird das Hauptergebnis formuliert; danach wird dieses auf vierdimensionale lokalkompakte topologische Laguerreebenen angewandt.

§ 1 Der Hauptsatz

Theorem: Jede projektive Laguerreebene, in welcher der Büschelsatz gilt und in der zwei Involutionen $\alpha_{a,\bar{a}}$ und $\alpha_{b,\bar{b}}$ bzw. $\beta_{b,L}$ mit $L := K(a,\bar{a},b)$ auf einem Kreis K identisch wirken, wenn sie alle Punkte von K , die von $\alpha_{a,\bar{a}}$ bewegt werden und die nichtparallel zu $a,\bar{a},b,\bar{b}$ sind, gleich abbilden, läßt sich in einen projektiven Raum einbetten, dessen Ebenen die Laguerreebene genau in den Kreisen und Parallelklassen schneidet.

Die Einbettung in den Raum Π der Konjugien wird in Kapitel II, §3 beschrieben. Die Axiome des projektiven Raums werden für Π in Kapitel III nachgewiesen.

§ 2 Vierdimensionale lokalkompakte zusammenhängende
topologische Laguerreebenen

2.1 Satz: Jede vierdimensionale lokalkompakte zusammenhängende topologische Laguerreebene Λ^4 ist projektiv.

Beweis: i) Je zwei Kreise von Λ^4 schneiden sich nach [8].

ii) Die Kreise von Λ^4 sind Sphären der Dimension zwei nach [8]. Die Büschelinvolutionen sind stetige bijektive Transformationen der Kreise. Sie können nach [3] als Fixpunktmenge höchstens eine 1-Sphäre besitzen, wenn sie von der Identität verschieden sind. Also gibt es in jedem Kreisbüschel und Berührbüschel genügend viele Schnittkreise zu einem vorgegebenen Kreis.

2.2 Bemerkung: Jede vierdimensionale lokalkompakte zusammenhängende topologische Laguerreebene Λ^4 , in welcher der Büschelsatz gilt, erfüllt die Voraussetzungen des Theorems aus §1.

Denn bilden zwei Involutionen $\alpha_{a,\bar{a}}$ und $\alpha_{b,\bar{b}}$ bzw. $\beta_{b,L}$ mit $L := K(a,\bar{a},b)$ alle Punkte eines Kreises K gleich ab, die nicht festbleiben unter $\alpha_{a,\bar{a}}$, so stimmen sie wegen der Kohärenz von Λ^4 auch auf der Fixpunktmenge überein, die höchstens eine 1-Sphäre sein kann. Daraus ergibt sich:

2.3 Theorem: Jede vierdimensionale lokalkompakte zusammenhängende topologische Laguerreebene Λ^4 , in welcher der Büschelsatz gilt, ist ovoidal, das heißt, sie läßt sich einbetten in einen projektiven Raum, so daß die Kreise und Parallelklassen die ebenen Schnitte mit der Laguerreebene sind. Die Kreise sind dann topologische Ovale. Wegen der komplexen Struktur von Λ^4 sind diese Ovale Kegelschnitte nach [4] und Λ^4 ist miquelsch.

2.4 Theorem: Jede lokalkompakte zusammenhängende topologische Laguerreebene Λ , in welcher der Büschelsatz gilt läßt sich einbetten in einen projektiven Raum, so daß die Kreise und Parallelklassen die ebenen Schnitte sind.

Beweis: Da keine topologischen Laguerreebenen einer Dimension größer als vier existieren nach [5], folgt die Behauptung aus [9] und 2.3 Theorem.

§ 3 Zur Existenz projektiver Möbius- und Laguerreebenen

Eine Möbiusebene ist wie die Laguerreebene eine Inzidenzstruktur bestehend aus Kreisen und Punkten, so daß zwar keine Parallelität auf den Punkten erklärt ist, sonst aber die Axiome des Verbindens, Berührens und der Reichhaltigkeit wie in I.1.1 Definition erfüllt sind.

3.1 Definition: Eine projektive Möbiusebene M ist eine Möbiusebene, die folgenden Bedingungen genügt:

- i) Je zwei Kreise von M schneiden sich.
- ii) In jedem Kreisbüschel und jedem Berührbüschel existieren mindestens zwei Kreise, die einen vorgegebenen Kreis, der nicht zum Büschel gehört, in jeweils zwei Punkten schneiden.

3.2 Proposition: Jede projektive Möbiusebene, in welcher der Büschelsatz gilt und in der zwei Involutionen $\alpha_{a,\bar{a}}$ und $\alpha_{b,\bar{b}}$ bzw. $\beta_{b,L}$ mit $L := K(a,\bar{a},b)$ auf einem Kreis K identisch wirken, wenn sie alle Punkte von K , die von $\alpha_{a,\bar{a}}$ bewegt werden, gleich abbilden, läßt sich in einen projektiven Raum einbetten, so daß die Kreise ebene Schnitte sind.

Beweis: Der Nachweis erfolgt wie bei den Laguerreebenen, jedoch können alle Fälle, in denen Parallelitäten auftreten, weggelassen werden.

3.3 Satz: Projektive Möbiusebenen M , die den Voraussetzungen von 4.2 Proposition genügen, gibt es nicht.

Beweis: Solche Möbiusebenen sind ovoidal, und die Einbettung in den projektiven Raum hat zur Folge, daß jede Gerade des Raumes das Ovoid schneidet oder berührt. Betrachtet man nun eine Tangentialebene an das Ovoid und darin eine Gerade, die den Berührungspunkt nicht enthält. So trifft diese das Ovoid nicht, und dies ergibt den Widerspruch.

4.4 Beispiel einer nichttopologischen projektiven Laguerreebene, in welcher der Büschelsatz gilt:

Gegeben sei ein abzählbar unendlicher projektiver Raum A . In einer Ebene dieses Raumes sei ein Oval wie in ([1], 2b) mittels transfiniter Induktion konstruiert, das keine Passanten besitzt und dessen Tangentenmenge nicht in zwei Geradenbüscheln enthalten ist. Über diesem Oval sei ein Kegel errichtet. Die Punkte des Kegels vermindert um seine Spitze zusammen mit den ebenen Schnitten als Kreisen bilden dann eine Laguerregeometrie Λ_K , in welcher nach [2] der Büschelsatz gilt.

Da keine Passanten existieren, schneiden sich je zwei Kreise. Wegen der Bedingung an die Tangenten schneidet jeder Kreis mindestens zwei Kreise aus jedem Kreis- und Berührbüschel. Λ_K ist also projektiv.

Von solchen Laguerregeometrien sind natürlich keine guten topologischen Eigenschaften zu erwarten.

Literaturverzeichnis:

- [1] BARLOTTI, A., Sulle 2-curve nei piani grafici,
Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 37, 91-97,
(1967).
- [2] BENZ, W., MÄURER, H., Über die Grundlagen der
Laguerre-Geometrie, J.-ber. Deutsch.
Math. Verein. 67, 14-42, (1964).
- [3] BROUWER, L.E.J., KERÉKJÁRTÓ, B. von, Über die
periodischen Transformationen der Kreis-
scheibe und der Kugelfläche, Math. Ann.
(1919), 36-41.
- [4] BUCHANAN, T., Ovale und Kegelschnitte in der kom-
plexen projektiven Ebene, Math.-Phys.
Semesterberichte 26, 244-260, (1979).
- [5] BUCHANAN, T., HÄHL, H., LÖWEN, R., Topologische
Ovale, Erscheint in Geometriae Dedicata.
- [6] FREUDENTHAL, H., STRAMBACH, K., Schließungssätze
und Projektivitäten in der Möbius- und
Laguerregeometrie, Math. Z. 143, 213-
234, (1975).
- [7] GROH, H.J., Topologische Laguerreebenen I, Abh.
Math. Sem. Univ. Hamburg 32, 216-231,
(1967).

- [8] GROH, H.J., Topologische Laguerreebenen II, Abh.
Math. Sem. Univ. Hamburg 34, 11-21, (1969).
- [9] SCHOLZ, W., Zweidimensionale lokalkompakte zusammenhängende topologische Laguerreebenen mit Büschelsatz und Die analytischen topologischen Laguerre- und Minkowskiebenen, Dissertation Erlangen 1980.

Lebenslauf

Am 12. April 1952 wurde ich als drittes Kind des Gymnasiallehrers Dr. Helmut Altrichter und seiner Frau Steffi Altrichter geb. Gießl in Mühlhausen Kreis Höchststadt geboren. Ab 1958 besuchte ich vier Jahre lang die Volksschule an der Uhlandstraße in Nürnberg, danach neun Jahre lang das Melanchthon-Gymnasium in Nürnberg. An diesem humanistischen Gymnasium legte ich 1971 die Reifeprüfung ab.

Im Herbst 1971 immatrikulierte ich mich an der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg für die Fächer Mathematik und Physik. Hier absolvierte ich im Frühjahr 1974 die Vorprüfung und im Frühjahr 1977 die wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an den Gymnasien in den Fächern Mathematik und Physik. Seitdem bin ich als Doktorand von Professor Dr. K. Strambach am Mathematischen Institut der Universität in Erlangen als wissenschaftliche Hilfskraft angestellt.

Im September 1978 verstarb meine Mutter. Im April 1979 heiratete ich Birgitta Altrichter geb. Wirnitzer aus Nürnberg.

